N° D'ORDRE : 33

THESE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE TROISIÈME CYCLE

Spécialité : MÉTROLOGIE
Section : MÉCANIQUE CELESTE

PAR

Armand HAZIZA
Licencié ès-Sciences

LA « TROISIÈME INTÉGRALE » MODÈLES CORRESPONDANTS DE LOI DE FORCE & DE DISTRIBUTION DES VITESSES

Soutenue le 25 JUIN 1964 devant la Commission d'Examen

MM. F. NAHON — Président
J. DELHAYE, J. UEBERSFELD — Examinateurs

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

N° D'ORDRE : 33

THESE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE TROISIÈME CYCLE

Spécialité : MÉTROLOGIE
Section : MÉCANIQUE CELESTE

PAR

Armand HAZIZA
Licencié ès-Sciences

LA « TROISIÈME INTÉGRALE » MODÈLES CORRESPONDANTS DE LOI DE FORCE & DE DISTRIBUTION DES VITESSES

Soutenue le 1964 devant la Commission d'Examen

MM. F. NAHON — Président
J. DELHAYE, J. UEBERSFELD — Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547626_0026

UNIVERSITE DE BESANCON

FACULTE DES SCIENCES

(à la date du 15 Février 1964)

Doyen Honoraire : M. GLANGEAUD

Professeurs Honoraires : MM. BAILLAUD R., JULLIEN, THIRY, TRILLAT, UEBERSFELD, VINCENSINI

Maître de Conférences Honoraire : M. GRANIER.

DOYEN	: M.	JACQUEMAIN	: Chimie Appliquée
ASSESSEUR	: M.	MESNAGE	: Chronométrie
PROFESSEURS	: MM.	TRONCHET	: Botanique
		CHATELET	: Mathématiques
		PERROT	: Chimie Générale
		DREFUSS	: Géologie-Minéralogie
		THEOBALD	: Paléontologie et géologie stratigraphe
		CROISOT	: Méthodes mathématiques de la Physique
		DELHAYE	: Astronomie
		QUANTIN	: Botanique
		CHALEAT	: Mécanique Appliquée
		RIPPLINGER	: Physiologie Animale
		NAHON	: Mécanique Générale
		BERNARD	: Chimie-Physique
		RIGAL	: Calcul Numérique
	Mme	ROZIS	: Physique
		THIEBAUT	: Géologie-Minéralogie
		VIENOT	: Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

	MM.	DEVIN	: Chimie Générale
		POTIER	: Physique des Solides
		GOMOT	: Zoologie
		MOTCHANE	: Electronique

MAITRES DE CONFERENCES :

	MM.	VALLEE	: Mathématiques Appliquées
		REAL	: Zoologie
		GOUARNE	: Mathématiques
	Mlle	LEGRAND	: Botanique
		THEOBALD J.	: Physique P.C.B. - S.P.C.N.
		REMOND	: Chargé d'Enseignement de la Maîtrise de Conférences de Chronométrie

CONSEILLER ADMINISTRATIF UNIVERSITAIRE : M. LAMBERT.

Ce travail a été réalisé dans le cadre des recherches faites au Laboratoire de Mécanique Théorique de la Faculté des Sciences de Besançon.

Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Nahon, Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon, qui m'a prodigué ses conseils et son aide.

Je voudrais dire ma gratitude à Monsieur Delhaye, Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon et Monsieur Uebersfeld, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, qui m'ont enseigné la persévérance et qui se sont intéressés à mon travail.

Il m'a été agréable d'assister aux exposés du séminaire de Mécanique Céleste qui se sont déroulés dans une ambiance sympathique.

Je n'aurai garde d'oublier Madame Cuenin qui a eu la lourde tâche d'assurer la frappe de ce travail.

-=-=-=-=-=-=-

TABLE DES MATIERES

I - Exposé de la théorie de Camm ("Distribution ellipsoïdale des vitesses des étoiles") — Pages

1°) Notions préliminaires 1
2)) Introduction 3
3°) Le potentiel gravitationnel Ω a une symétrie axiale .. 8
4°) La distribution des vitesses a une symétrie axiale 10
5°) Calcul de Ω 16
6°) Détermination de la densité de masse 25
7°) Aucun système d'étoiles de masses égales ne peut être en équilibre sous l'action du potentiel gravitationnel Ω créé par l'ensemble de ces étoiles seulement 27

II - Exposé de la théorie de Kuzmin (Modèle de la galaxie rendant compte de la distribution triaxiale des vitesses)... 61

1°) calcul du potentiel ϕ et de la densité ρ dans le cas général 65
2°) Systèmes stellaires plats 73
3°) Modèles concrets pour la galaxie 74

III - Essai de comparaison et de critique des deux théories

A) Théorie de Camm 79
B) Théorie de Kuzmin 85
C) CONCLUSION (mouvements perpendiculaires au plan galactique)..... 91

I - EXPOSE DE LA THEORIE DE CAMM

"DISTRIBUTION ELLIPSOIDALE DES VITESSES DES ETOILES" 2

---

1) - NOTIONS PRELIMINAIRES

Considérons une étoile dans un système stellaire. Il existe à l'intérieur de ce système un champ de forces et sous son action l'étoile décrit une orbite. Ces forces sont des forces de gravitation newtonienne qui résultent de tout le système et nous supposerons qu'il existe une fonction de force Ω que nous appellerons potentiel de gravitation.

Ce champ de forces crée une certaine distribution des vitesses dans chaque élément de volume du système.

Appelons en effet x, y, z les coordonnées d'une étoile située au point M, le système fondamental de référence étant considéré comme absolu avec, pour origine, le centre du système galactique si on étudie notre galaxie.

Les trois composantes de la vitesse de l'étoile (par rapport au soleil) seront désignées par u, v, w dans ce système d'axes de référence.

Dans un élément de vdume dx dy dz situé autour du point M il y a dN étoiles :

$$dN = \nu(xyz)\, dx\, dy\, dz$$

$\nu(xyz)$ étant le nombre d'étoiles par unité de volume autour du point M.

Un certain nombre dn de ces étoiles ont les composantes de

leurs vitesses comprises respectivement entre les valeurs :

u et u + du

v et v + dv

w et w + dw

Ce nombre dn est fonction du point M considéré et il est proportionnel à l'élément de volume de l'espace des vitesses du dv dw

Le coefficient de proportionnalité sera fonction de x, y, z, u, v et w, soit :

$$\delta(x,y,z,u,v,w)$$

On aura donc :

$$dn = \nu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \times \delta(x,y,z,u,v,w)\, du\, dv\, dw$$

ce que l'on peut écrire :

$$dn = f\,(x,y,z,u,v,w)\, dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw$$

dn est ainsi le nombre d'étoiles du système dont les coordonnées x,y,z,u,v,w se trouvent dans l'élément dx.dy dz du dv dw de l'espace à 6 dimensions des positions et des vitesses; f (x,y,z,u,v,w) est la fonction de distribution des vitesses.

Nous considérons dans la suite un système stable où f ne contient pas explicitement le temps t. Cela veut dire que f garde la même valeur en un point de coordonnées x,y,z,u,v,w quel que soit l'instant t considéré.

Si on considère le système comme un milieu continu et si on admet que le mouvement est permanent on a $\frac{df}{dt} = 0$

soit : $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dt} = 0$

ou : $u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{du}{dt}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial f}{\partial w} = 0 \quad (1)$

Cette équation est l'équation fondamentale de la dynamique stellaire qui sera la base de l'exposé de Camm étudié dans la première partie et dont on décrira les grandes lignes dans l'introduction. Elle servira aussi à trouver les coefficients des composantes des vitesses de la troisième intégrale suggérée par Kuzmin dont on exposera la théorie dans la deuxième partie.

2) - INTRODUCTION

Pour expliquer le phénomène du mouvement préférentiel des étoiles, Schwarzschild suggéra pour la distribution des vitesses des étoiles la loi de la distribution ellipsoïdale au lieu de l'explication du courant sphérique analogue à celle de la théorie cinétique des gaz.

La théorie proposée est en accord avec la distribution des mouvements propres qui sont observés.

On ne peut rejeter cependant les autres théories mais celle de la distribution ellipsoïdale satisfaisant les données de l'observation, il reste nécessaire de chercher si les lois de la dynamique stellaire expliquent une telle distribution considérée dans la cinématique stellaire. On suppose ici seulement que la fonction de distribution l'est d'une seule quantité Q, somme de termes linéaires et quadratiques par rapport à u,v,w ce qui explique le nom ellipsoïdale donné plus haut à la distribution des vitesses.

On a trouvé pour Q une solution qui est en accord avec les caractéristiques observées suivantes :

- L'ellipsoïde des vitesses E qui a pour équation

  Q = constante à trois axes inégaux.

- La direction du vertex du courant stellaire ou direction préférentielle pour les vitesses des étoiles n'est pas la même que celle du centre galactique.

Les conditions dynamiques nécessaires de cette solution comme par exemple la forme du potentiel gravitationnel Ω n'ont été trouvées que pour des systèmes particuliers qui n'ont pas les caractéristiques des ellipsoïdes observés. Cet exposé poursuit et complète les conclusions trouvées pour savoir principalement l'existence possible de systèmes à l'état stable et possédant une distribution ellipsoïdale généralisée pour les vitesses. Il est divisé en trois parties.

1°) -En faisant les deux hypothèses simples que le moyen mouvement du système étudié, supposé fini, n'est pas nul en tout point et que le potentiel Ω n'a pas une symétrie sphérique, on trouve que le système doit posséder la symétrie axiale. On voit en outre que l'ellipsoïde des vitesses a trois axes inégaux et que la déviation du vertex existe en latitude et non en longitude, deux des axes étant dans un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie.

2°) -Ces caractéristiques cinématiques qui sont la stabilité et la distribution éllipsoïdale sont créées par le potentiel Ω dont on trouve la forme dans deux cas particuliers où les constantes d'intégration des coefficients de Q prennent des valeurs particulières puis dans le cas général.

3°) -On restreint le problème pour montrer enfin que de tels systèmes stellaires dont les éléments ont des masses égales ne peuvent exister à l'état d'équilibre à moins qu'un champ de force

extérieur ne s'ajoute au champ qui serait seulement gravitationnel On notera ici qu'Eddington avait traité le problème vingt cinq ans plus tôt mais l'exposé suivant apporte des progrès en trois points :

- la notion de surfaces principales des vitesses qui est une restriction n'est pas introduite ici,

- l'existence de la symétrie axiale est démontrée,

- la fonction de distribution est plus générale dans ce sens qu'on ne la suppose pas être sous forme exponentielle.

Dans les notions préliminaires nous avons montré que pour les systèmes étudiés f (x,y,z,u,v,w) n'est pas quelconque mais vérifie l'équation de continuité :

$$u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{du}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{dw}{dt} \frac{\partial f}{\partial w} = 0 \quad (1)$$

En négligeant l'action des passages sur les orbites des étoiles c'est-à-dire l'action d'une étoile sur une étoile voisine devant le potentiel gravitationnel Ω on a les équations du mouvement de l'étoile située au point de coordonnées x,y,z sous la forme :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

Ces équations permettent d'exprimer les accélérations en termes de coordonnées d'espace.

L'équation (1) devient :

$$u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial w} = 0 \quad (2)$$

Comme il a été dit dans l'introduction on posera par hypothèse :

$$Q = \emptyset + pu + qv + rw + au^2 + bv^2 + cw^2 + 2\,f\,v\,w + 2\,g\,w\,u + 2\,h\,uv$$

et on suppose que f est fonction de l'argument Q seulement. Le problème sera d'ailleurs de trouver si f (Q), Q ayant la forme ci-dessus est une solution valable de l'équation (2). Les coefficients :

$$\emptyset,\ p,\ q, r, a, b, c, f, g \text{ et } h$$

sont en général des fonctions continues de x,y,z mais ne sont pas des fonctions des composantes des vitesses.

On supposera que Q est une forme définie positive par rapport à u,v,w pour toutes les valeurs de x,y,z pour exprimer qu'il n'y a pas un nombre fini d'étoiles ayant une vitesse infinie.

Compte tenu de la forme de f on voit que le premier membre de l'équation (2) est un polynôme du troisième degré par rapport à u,v,w qui par identification avec zéro donne les 20 équations différentielles linéaires aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial a}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial b}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

$$2\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = 0$$

$$2\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} + 2\frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

$$2\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z} = 0$$

Groupe I obtenu en égalant à zéro les coefficients des termes du 3° degré.

$$\frac{\partial c}{\partial z} + 2\frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} + 2\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial g}{\partial y} + 2\frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

Groupe II (coefficients des termes du 2ème degré)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + 2a\frac{\partial \Omega}{\partial x} + 2h\frac{\partial \Omega}{\partial y} + 2g\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + 2h\frac{\partial \Omega}{\partial x} + 2b\frac{\partial \Omega}{\partial y} + 2f\frac{\partial \Omega}{\partial Z} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + 2g\frac{\partial \Omega}{\partial x} + 2f\frac{\partial \Omega}{\partial y} + 2c\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$$

Groupe IV (coefficients des termes du 1° degré)

$$p\frac{\partial \Omega}{\partial x} + q\frac{\partial \Omega}{\partial y} + r\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$$

Groupe III (termes ne contenant pas u,v,w)

Nous allons montrer à partir de ces équations (groupes II et III) que Ω a une symétrie hélicoïdale qui se réduit à une symétrie axiale pour le système fini en dimensions que nous étudions et que si la symétrie n'est pas sphérique pour Ω la symétrie axiale est complète ce que l'on verra en calculant les coefficients de Q (équations I et IV). On calculera enfin Ω (équations IV) d'où

l'on tirera la densité ρ grâce à l'équation de Poisson.

Ceci constituera un premier point de l'exposé

3 - Ω A UNE SYMETRIE AXIALE

Considérons l'équation III

$$p \frac{\partial \Omega}{\partial x} + q \frac{\partial \Omega}{\partial y} + r \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$$

Les équations II nous donnent les expressions de p;q,r, qui sont des formes linéaires de x,y,z, contenant 6 constantes d'intégration arbitraires que l'on ramène à deux constantes grâce à deux changements d'axes de coordonnées.

On obtient ainsi :

$$p = -\omega y$$

$$q = \omega x$$

$$r = r_o$$

ω et r_o étant les deux constantes en question, l'équation III s'écrit alors :

$$\omega \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) + r_o \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \qquad \text{III'}$$

Cette équation aux dérivées partielles admet comme système associé :

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} = \frac{dz}{r_o}$$

Cherchons deux solutions particulières de ce système

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0$$

$$x^2 + y^2 = \text{constante}$$

$$y\,dx - x\,dy = -\frac{\omega}{r_o} dz$$

$$x^2\, d\frac{y}{x} = -\frac{\omega}{r_o} dz$$

En coordonnées polaires on aura après intégration

$$\vartheta = \frac{-\alpha\omega}{r_o} z + \text{constante}$$

$$\text{ou} \quad z + \frac{r_o}{\alpha\omega} \text{Arctg} \frac{y}{x} = \text{constante}$$

Ω sous sa forme la plus générale s'écrit donc ainsi

$$\Omega = \Omega\left(x^2 + y^2, z + \frac{r_o}{\alpha\omega} \text{Arctg} \frac{y}{x}\right)$$

Le potentiel Ω est caractérisé par une symétrie hélicoïdale ce qui entraîne que le système est infini, conclusion contraire à l'hypothèse faite sur la dimension finie des systèmes que nous étudions.

On doit donc avoir $r_o = 0$ $(\omega \neq 0)$, Ω a alors une symétrie axiale.

L'équation III' devient :

$$\omega\left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right) = 0 \qquad \text{III"}$$

ω est différent de zéro car si $\omega = 0$ on a $p = q = r = 0$

Le moyen mouvement serait nul en tout point ce qui est contraire à l'hypothèse faite par Camm dans son étude exposée ici.

III" peut alors s'écrire :

$$x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0 \qquad \text{III}'''$$

Pour le cas particulier $\omega = 0$, $r_o \neq 0$ on a d'après III' $\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$ ce qui ne peut être pour un système fini car :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} \sim - \frac{M}{z^2} \quad (M \text{ masse du système})$$

Les seuls systèmes possibles sous les conditions imposées, à savoir que le système est fini et que le moyen mouvement n'est pas nul en tout point, sont ceux pour lesquels l'équation III''' est

vérifiée. On a vu qu'ils ont un potentiel Ω caractérisé par une symétrie axiale.

Cette symétrie nous incite à continuer l'étude en coordonnées cylindriques, l'axe de symétrie coincidant avec l'axe des z.

Les nouvelles coordonnées seront appelées R, Θ, z et les composantes des vitesses suivant les directions principales Π, Θ, Z. On aura :

$$\Pi = \frac{dR}{dt}$$

$$\Theta = R \frac{d\theta}{dt}$$

$$Z = \frac{dz}{dt}$$

III''' devient $\frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = 0$ ce qui traduit simplement la symétrie axiale caractérisant le potentiel.

4 - LA DISTRIBUTION DES VITESSES A UNE SYMETRIE AXIALE

Nous introduisons l'hypothèse complémentaire suivante : Ω n'a pas une symétrie sphérique. Elle nous permettra de déduire que les coefficients de E, a,b,c,f,g,h sont indépendants de θ ainsi que ϕ.

Notre étude sera alors évidemment plus simple et se réduira à un problème à deux dimensions.

Dans le nouveau système d'axes de coordonnées la fonction de distribution s'écrit :

$$(3)\quad f \equiv f\ (\phi + \omega R\Theta + a\Pi^2 + b\Theta^2 + cZ^2 + 2f\Theta Z + 2gZ\Pi + 2h\Pi\Theta\ )$$

car $pu + qv = \omega R^2 \frac{d\theta}{dt}$

ou $pu + qv = \omega R\Theta$

Les quantités a,b,c,f,g et h sont fonctions des coefficients de E associés aux variables u,v,w et de $\cos\vartheta$ et $\sin\vartheta$

On a par exemple :

a (coefficient en coordonnées cylindriques) $= a\cos^2\vartheta + b\sin^2\vartheta + 2h\sin\vartheta\cos$

les a,b,h du second membre sont des coefficients de E associés à u,v,w.

L'équation de continuité s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$(4)\quad \frac{\partial f}{\partial R}\frac{dR}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \Pi}\frac{d\Pi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \Theta}\frac{d\Theta}{dt} + \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{dZ}{dt} = 0$$

Cherchons les accélérations en fonction des coordonnées d'espace et de vitesse grâce aux équations du mouvement.

On a :

$$\frac{d\Pi}{dt} - \frac{\Theta^2}{R} = \frac{\partial \Omega}{\partial R}$$

$$\frac{d\Theta}{dt} + \Pi\frac{\Theta}{R} = 0$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

L'équation (4) s'écrit alors :

$$(5)\quad \Pi\frac{\partial f}{\partial R} + \frac{\Theta}{R}\frac{\partial f}{\partial \vartheta} + Z\frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial R} + \frac{\Theta^2}{R}\right)\frac{\partial f}{\partial \Pi} - \Pi\frac{\Theta}{R}\frac{\partial f}{\partial \Theta} + \frac{\partial \Omega}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial Z} = 0$$

Le premier membre de l'équation (5) donne, compte tenu de la valeur de f (3), un polynôme du troisième degré en Π Θ Z qui par identification à zéro donne 13 équations aux dérivées partielles linéaires qui sont les suivantes :

$$\frac{\partial a}{\partial R} = 0$$

$$\frac{\partial b}{\partial \theta} + {}^{2h} = 0$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

$$2\,\frac{\partial h}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial a}{\partial \theta} - 2\,\frac{h}{R} = 0$$

$$\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{2}{R}\frac{\partial f}{\partial \theta} + 2\,\frac{g}{R} = 0$$

$$\frac{\partial c}{\partial R} + 2\,\frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial b}{\partial R} + \frac{2}{R}\frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{2a}{R} - \frac{2b}{R} = 0$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial c}{\partial \theta} + 2\,\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$2\,\frac{\partial g}{\partial R} + \frac{\partial a}{\partial z} = 0$$

$$2\,\frac{\partial f}{\partial R} + \frac{2}{R}\frac{\partial g}{\partial \theta} + 2\,\frac{\partial h}{\partial z} - 2\,\frac{f}{R} = 0$$

Groupe I_2 : coefficients des termes du 3° degré égalés à zéro.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} + 2a\,\frac{\partial \Omega}{\partial R} + 2g\,\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + 2h\,\frac{\partial \Omega}{\partial R} + 2f\,\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2g\,\frac{\partial \Omega}{\partial R} + 2c\,\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Groupe IV_2 : coefficients des termes linéaires égales à zéro.

Le coefficient de l'unique terme du deuxième degré $\Pi\,\Theta$ s'annule identiquement et il n'y a pas de termes indépendants de Π, Θ, Z

On n'a plus les équations dépendants de p, q, r ou w caractérisant le moyen mouvement qu'on a posé comme n'étant pas nul plus haut.

Les équations I_2 permettent de déterminer les coefficients a,b,c,f,g et h de E en fonction de Rθ z et de 20 constantes d'intégration arbitraires.

Le calcul de ces coefficients a été fait par Chandrasekhar dans l'Astrophysical Journal de 1939, n° 90, page 119.

En examinant les équations I_2 on voit que :

a est quadratique en z et indépendant de R

b est quadratique en z

c est indépendant de z

f est linéaire en z

g est linéaire en z et linéaire en R

h est quadratique en z et linéaire en R

On obtient les valeurs suivantes :

$$a = a_o - 2za_1 + z^2a_3 + (b_o - 2zb_1 + z^2b_3)\sin 2\theta + (c_o - 2zc_1 + z^2c_3)\cos 2\theta$$

$$b = a_o - 2za_1 + z^2a_3 - (b_o - 2zb_1 + z^2b_3)\sin 2\theta - (c_o - 2zc_1 + z^2c_3)\cos 2\theta + R^2a_2 - 2R(b_5 + zb_6)\sin\theta - 2R(c_5 + zc_6)\cos\theta$$

$$c = a_4 - 2R(b_2\sin\theta + c_2\cos\theta) + R^2(a_3 + b_3\sin 2\theta + c_3\cos 2\theta)$$

$$f = Ra_5 + (b_4 + zb_2 - R^2b_6)\cos\theta - (c_4 + zc_2 - R^2c_6)\sin\theta + R(b_1 - zb_3)\cos 2\theta - R(c_1 - zc_3)\sin 2\theta$$

$$g = R(a_1 - za_3) + R(b_1 - zb_3)\sin 2\theta + R(c_1 - zc_3)\cos 2\theta + (b_4 + zb_2)\sin\theta + (c_4 + zc_2)\cos\theta$$

$$h = R(b_5 + zb_6)\cos\theta - R(c_5 + zc_6)\sin\theta + (b_o - 2zb_1 + z^2b_3)\cos 2\theta - (c_o - 2zc_1 + z^2c_3)\sin 2\theta$$

Les a_i, b_i, c_i sont les 20 constantes d'intégration.

Les équations IV_2 [(1),(2),(3)] permettent de montrer que les 14 constantes b_i, c_i sont nulles.

Les conditions d'intégrabilité des équations IV_2 s'écrivent

$$\frac{\partial a}{\partial \Theta}\frac{\partial \Omega}{\partial R}+\frac{\partial g}{\partial \Theta}\frac{\partial \Omega}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial R}\left(Rh\frac{\partial \Omega}{\partial R}\right)+\frac{\partial}{\partial R}\left(Rf\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) \qquad (1)'$$

$$\frac{\partial g}{\partial \Theta}\frac{\partial \Omega}{\partial R}+\frac{\partial c}{\partial \Theta}\frac{\partial \Omega}{\partial z}=R\frac{\partial}{\partial z}\left(h\frac{\partial \Omega}{\partial R}\right)+R\frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) \qquad (2)'$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(a\frac{\partial \Omega}{\partial R}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(g\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial R}\left(g\frac{\partial \Omega}{\partial R}\right)+\frac{\partial}{\partial R}\left(c\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) \qquad (3)'$$

Les premiers membres de ces équations effectuées sont des formes linéaires en $\cos 2\Theta$, $\sin 2\Theta$, $\cos\Theta$, $\sin\Theta$

Leur identification à zéro donne 15 équations qui sont des relations entre les a_i, b_i, c_i et ces relations entraînent que les b_i et les c_i sont nuls.

On montre par exemple que $b_o = b_1 = b_3 = 0$ à partir des équations obtenues en égalant à zéro les coefficients de $\cos 2\Theta$ dans (1)' et (2)' en supposant que le potentiel Ω n'a pas une symétrie sphérique et qu'il est fini en tout point pour les systèmes de dimensions finies que nous étudions.

On voit ainsi que a,b,c,f,g,h sont indépendants de Θ

Le système IV_2 permet alors de montrer que $\emptyset$ est aussi indépendant de Θ

La fonction de distribution f ne dépend donc que des variables R et z.

On remarquera que f = h = 0 et la ligne des vertex ne peut dévier de la direction de C qu'en latitude galactique.

Il ne peut y avoir de déviation en longitude.

Dans le cas considéré ici où Ω n'a pas une symétrie sphérique les coefficients de E prennent les expressions suivantes :

$$f = h = 0$$

$$a = a_o - 2za_1 + z^2 a_3$$

$$b = a_o - 2za_1 + z^2 a_3 + R^2 a_2$$

$$c = a_4 + R^2 a_3$$

$$g = R(a_1 - za_3)$$

La forme Q étant définie positive le déterminant des coefficients de u,v,w des dérivées de Q par rapport à u,v,w doit être positif.

On a :

$$\begin{vmatrix} a & o & g \\ 0 & b & 0 \\ g & o & c \end{vmatrix} > 0$$

$$abc - bg^2 > 0$$

On doit avoir en outre, a,b,c, positifs.

L'inégalité précédente s'écrit $ac - g^2 > 0$ ou en remplaçant a,c,g par leurs valeurs :

$$R^2(a_3 a_o - a_1^2) + a_4(a_o - 2za_1 + z^2 a_3) > 0$$

D'autre part a doit être positif. Pour cela on doit avoir :

$$a_3 > 0 \quad \text{et} \quad a_1^2 - a_o a_3 < 0 \quad \text{et donc} \quad a_o > 0$$

d'où : $a_4 > 0$

$a_1^2 < a_o\, a_3$ montre que si a_3 est nul a_1 est nul.

On peut faire le changement de variable :

$$Z = -\left(\frac{a_1}{a_3} - z\right)$$

Les valeurs des coefficients deviennent :

$$a = a_o + z^2 a_3$$

$$b = a_o + z^2 a_3 + R^2 a_2$$

$$c = a_4 + R^2 a_3$$

$$g = -Rz a_3$$

$$f = h = 0$$

5 - CALCUL DE Ω

L'équation $IV_2(2)$ est satisfaite identiquement et les équations IV_2 deviennent :

$$\frac{\partial \phi}{\partial R} + 2(a_o + z^2 a_3)\frac{\partial \Omega}{\partial R} - 2\,Rz a_3 \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - 2Rz a_3 \frac{\partial \Omega}{\partial R} + 2\,(a_4 + R^2 a_3)\,\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \qquad (2) \qquad IV_3$$

En dérivant la première équation par rapport à z et la seconde par rapport à R et en les soustrayant membre à membre on obtient la condition d'intégrabilité suivante :

$$a_3\left[3z\frac{\partial \Omega}{\partial R} - 3R\frac{\partial \Omega}{\partial z} + (z^2 - R^2)\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R \partial z} + Rz\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}\right)\right] + (a_o - a_4)\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R \partial z} = 0 \qquad (3)$$

Cette équation a d'abord été donnée par Oort (1928) comme

équation devant être satisfaite par le potentiel d'un système supposé être à symétrie axiale.

Oort a donné une solution tout à fait particulière en restreignant la généralité de la distribution des vitesses

au cas(1) $\begin{cases} a_3 = 0 \\ a_o = a_4 \end{cases}$

On a alors $a = a_o$

$b = a_o + R^2 a_2$

$c = a_o$

$g = f = h = 0$

Les équations IV_3 deviennent :

$$\frac{\partial \phi}{\partial R} + 2 a_o \frac{\partial \Omega}{\partial R} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + 2 a_o \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$$

Ce qui montre que :

$$\phi = - 2 a_o \Omega + K$$ K étant une constante

E devient un corps de révolution avec les axes dans les directions R et Z égaux. Cette distribution est possible.

Cas(2) Mais pour la galaxie Ea 3 axes inégaux, Lindblad obtient des systèmes avec 3 axes inégaux pour E, toujours dans le cas $a_3 = 0$, en supposant que $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R \partial z} = 0$ (au lieu de supposer $a_o = a_4$) dans une région finie de l'espace. Cette hypothèse pose la question de la continuité du potentiel et de la densité quand on passe de cette région aux régions où :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R \, \partial z} \neq 0$$

Cet artifice est inutile car on peut obtenir des systèmes avec 3 axes inégaux pour E avec $a_3 \neq 0$

Nous considèrerons d'abord le cas où $a_3 \neq 0$, $a_o = a_4$ puis le cas le plus général où $a_3 \neq 0$, $a_o \neq a_4$

Cas 1 $a_3 \neq 0$, $a_o = a_4$

Pour faire l'étude dans ce cas on passe aux coordonnées :

$$R = r\cos\chi$$
$$z = r\sin\chi$$

Avec les variables r, on obtient :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial R} = \cos\chi \frac{\partial\Omega}{\partial r} - \frac{\sin\chi}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\chi}$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \sin\chi \frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{\cos}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\chi}$$

Les équations IV_3 deviennent :

$$\cos\chi\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\sin\chi}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\chi} + 2(a_o + z^2 a_3)(\cos\chi\frac{\partial\Omega}{\partial r} - \frac{\sin\chi}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\chi}) - 2Rza_3(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\sin\chi + \frac{\cos\chi\partial\Omega}{r\ \partial\chi}) =$$

Ce que l'on peut écrire :

$$\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\phi + 2a_o\Omega) - \frac{z}{r^2}\frac{\partial}{\partial\chi}(\phi + 2a_o\Omega) - 2a_3 z\frac{\partial\Omega}{\partial\chi} = 0$$

Ou encore :

$$\left\{\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{z}{r^2}\frac{\partial}{\partial\chi}\right\}(\phi + 2a_o\Omega) - 2a_3 z\frac{\partial\Omega}{\partial\chi} = 0 \qquad (1)'$$

De même on aura : IV'_3

$$\left\{\frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{R}{r^2}\frac{\partial}{\partial\chi}\right\}(\phi + 2a_o\Omega) + 2\,a_3 R\frac{\partial\Omega}{\partial\chi} = 0 \qquad (2)'$$

les dérivées partielles portent sur $\phi + 2a_o\Omega$

En multipliant les deux membres de IV_3' (1)' par R et les deux membres de IV_3' (2)' par z et en additionnant membre par membre les équations obtenues on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial r}(\phi+2a_o\Omega) = 0$$

En les multipliant respectivement par z et R et en les additionnant membre à membre on a :

$$\frac{\partial}{\partial \chi}(\phi+2a_o\Omega) + 2a_3 r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \chi} = 0$$

Après intégration les deux équations précédentes donnent :

$$\phi + 2\, a_o\Omega = 2a_3\, G(\chi)$$

$$\phi + 2\, a_o\Omega + 2a_3 r^2\Omega = 2a_3\, F(r)$$

D'où l'on tire :

$$\Omega = \frac{F(r) - G(\chi)}{r^2}$$

$$\phi = \frac{2}{r^2}\left[(a_o+a_3r^2)\, G(\chi) - a_o\, F(r)\right]$$

On voit que F fonction du rayon sphérique seulement détermine la distribution générale de la densité alors que G fonction de la latitude seule détermine le degré d'aplatissement du système.

Cas : $a_3 \neq 0$, $a_o \neq a_4$

Posons :

$$C = \frac{1}{2}(a_o+a_4)$$

$$B = \frac{1}{2}\,\frac{a_o - a_4}{a_3}$$

On fera le changement de variables défini par :

$$R^2 = \frac{1}{2B} (X+B) (Y+B)$$

$$z^2 = - \frac{1}{2B} (X-B) (Y-B)$$

où les nouvelles variables X, Y sont racines de l'équation :

$$t^2 - t (R^2+z^2) + B (R^2-z^2-B) = 0$$

Remarquons que :

$$|X| > B$$
$$|Y| < B$$

On a :

$$R = f (X,Y)$$
$$z = g (X,Y)$$

Les courbes définissant le nouveau système d'axes de coordonnées seront déterminées en faisant X = constante, puis Y = constant

Ces courbes sont des allipses et des hyperboles ayant même foyer $\left(OF = \sqrt{2B}\right)$. En effet on a :

$$\frac{2 B R^2}{X + B} + \frac{2 Bz^2}{X - B} = 2B$$

ou $$\frac{R^2}{X + B} + \frac{z^2}{X - B} = 1 \qquad (X = \text{constante})$$

C'est une ellipse avec :

$$\left(X + B = a^2\right.$$
$$X - B = b^2$$
$$\left.c^2 = 2B\right) \quad \left(\text{le foyer à } \sqrt{2B} \text{ du centre sur OR}\right)$$

a et b désignent ici les axes de l'ellipse

et c la distance au foyer

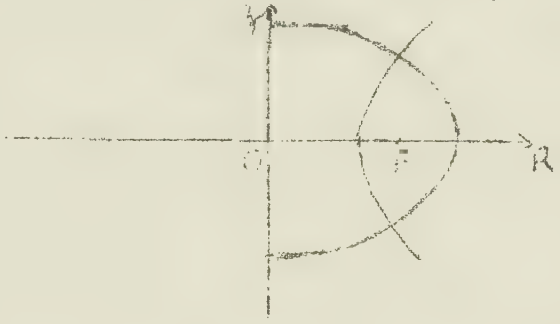
d'autre part :

$$\frac{2B\,R^2}{Y+B} + \frac{2\,B\,z^2}{-B+Y} = 2B$$

ou $$\frac{R^2}{Y+B} - \frac{R^2}{B-Y} = 1$$

On a encore : $C^2 = 2B$

On a une famille d'ellipses et d'hyperboles homofocales (les paramètres sont respectivement X et Y)



Il est facile de voir en calculant les racines de l'équation $t^2-t\,(R^2+z^2)+B\,(R^2-z^2-B)=0$ pour les grandes valeurs de r, sachant que :

$$R = r\cos\chi$$

$$z = r\sin\chi$$

que $X \sim r^2$ et $Y \sim B\cos 2\chi$

Cherchons ce que deviennent les équations IV_3 dans le nouveau système de coordonnées.

Les relations entre dérivées partielles sont données par les écritures suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial R} = \left\{ 2R\,\frac{X-B}{X-Y}\,\frac{\partial}{\partial X} + \frac{Y-B}{Y-X}\,\frac{\partial}{\partial Y} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \left\{ 2z\,\frac{X+B}{X-Y}\,\frac{\partial}{\partial X} + \frac{Y+B}{Y-X}\,\frac{\partial}{\partial Y} \right\}$$

L'équation $IV_3(1)$ s'écrit ainsi :

$$2R\left[\frac{X-B}{X-Y}\frac{\partial\phi}{\partial X}+\frac{Y-B}{Y-X}\frac{\partial\phi}{\partial Y}\right]+4R(a_o+z^2a_3)\left[\frac{X-B}{X-Y}\frac{\partial\Omega}{\partial X}+\frac{Y-B}{Y-X}\frac{\partial\Omega}{\partial Y}\right]$$

$$-4Rz^2a_3\left[\frac{X+B}{X-Y}\frac{\partial\Omega}{\partial X}+\frac{Y+B}{Y-X}\frac{\partial\Omega}{\partial Y}\right]=0$$

ou :

$$\frac{X-B}{X-Y}\frac{\partial\phi}{\partial X}+\frac{\partial\Omega}{\partial X}\left[2a_o\frac{X-B}{X-Y}-4z^2a_3\frac{B}{X-Y}\right]$$

$$+\frac{Y-B}{Y-X}\frac{\partial\phi}{\partial Y}+\frac{\partial\Omega}{\partial Y}\left[2a_o\frac{Y-B}{Y-X}-4z^2a_3\frac{B}{Y-X}\right]=0$$

ou encore :

$$(X-B)\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial X}+a_o\frac{\partial\Omega}{\partial X}+a_3(Y-B)\frac{\partial\Omega}{\partial X}\right]-(Y-B)\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial Y}+a_o\frac{\partial\Omega}{\partial Y}+a_3(X-B)\frac{\partial\Omega}{\partial Y}\right]=0$$

Ou enfin :

IV''_3

$$(1)''\quad \frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial X}X-\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial X}B+a_oX\frac{\partial\Omega}{\partial X}-a_oB\frac{\partial\Omega}{\partial X}+a_3(XY-XB-BY+B^2)\frac{\partial\Omega}{\partial X}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial Y}Y+\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial Y}B-a_oY\frac{\partial\Omega}{\partial Y}+a_oB\frac{\partial\Omega}{\partial Y}-a_3(XY-BY-BX+B^2)\frac{\partial\Omega}{\partial Y}=0$$

De même on mettra l'équation $IV_3(2)$ sous la forme

$$(2)''\quad \frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial X}X+\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial X}B+a_4X\frac{\partial\Omega}{\partial X}+a_4B\frac{\partial\Omega}{\partial X}+a_3(XY+XB+BY+B^2)\frac{\partial\Omega}{\partial X}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial Y}Y-\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial Y}B-a_4Y\frac{\partial\Omega}{\partial Y}-Ba_4\frac{\partial\Omega}{\partial Y}-a_3(XY+YB+BX+B^2)\frac{\partial\Omega}{\partial Y}=0$$

En additionnant membre à membre ces deux équations on obtient sachant que $B(a_4-a_o)=-2B^2a_3$

$$X\frac{\partial\phi}{\partial X}+2CX\frac{\partial\Omega}{\partial X}+2a_3XY\frac{\partial\Omega}{\partial X}-Y\frac{\partial\phi}{\partial Y}-2CY\frac{\partial\Omega}{\partial Y}-2a_3XY\frac{\partial\Omega}{\partial Y}=0$$

En les soustrayant membre à membre on a

$$B\frac{\partial \phi}{\partial X} + (a_4 - a_o)\, X \frac{\partial \Omega}{\partial X} + (a_4 + a_o)\, B \frac{\partial \Omega}{\partial X} + 2a_3(XB+BY) - B\frac{\partial \phi}{\partial Y} - (a_4 - a_o)Y \frac{\partial \Omega}{\partial Y}$$

$$-(a_4+a_o)B\frac{\partial \Omega}{\partial Y} - 2a_3(BY+BX) = 0$$

$$\frac{1}{2} B \frac{\partial \phi}{\partial X} + CB \frac{\partial \Omega}{\partial X} + Ba_3 Y \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{1}{2} B \frac{\partial \phi}{\partial Y} - CB \frac{\partial \Omega}{\partial Y} - a_3 BX \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = 0$$

Si l'on pose $\bar{\Phi} = \left(\frac{1}{2}\phi + C\Omega\right) / a_3$

les deux équations obtenues s'écrivent :

$$X\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial X} + Y \frac{\partial \Omega}{\partial X}\right) = Y\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial Y} + X \frac{\partial \Omega}{\partial Y}\right)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial X} + Y \frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial Y} + X \frac{\partial \Omega}{\partial Y}$$

Ceci montre que l'on a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial X} + Y \dfrac{\partial \Omega}{\partial X} = 0 \\ \dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial Y} + X \dfrac{\partial \Omega}{\partial Y} = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations vont nous permettre de calculer Ω puis $\bar{\Phi}$

Dérivons la première par rapport à Y et la seconde par rapport à X.

On tire alors :

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(Y \frac{\partial \Omega}{\partial X}\right) = \frac{\partial}{\partial X}\left(X \frac{\partial \Omega}{\partial Y}\right)$$

On a donc, dS étant une différentielle totale exacte :

$$dS = Y \frac{\partial \Omega}{\partial X} dX + X \frac{\partial \Omega}{\partial Y} dY$$

D'où :

$$Y \frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{\partial S}{\partial X}$$

$$S = Y\Omega + C(Y)$$

$$X \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = Y \frac{\partial \Omega}{\partial Y} + \Omega + C'(Y)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial Y} (Y-X) + \Omega = -C'(Y)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\Omega (Y-X)\right] = -C'(Y)$$

soit en intégrant :

$$\Omega (Y-X) = -C(Y) + G(X)$$

Ce que l'on peut écrire sous la forme :

$$\Omega = \frac{F(X) - G(Y)}{X - Y}$$

Calculons Φ :

$$\Phi = -Y\Omega + H(Y)$$

$$\frac{dH}{dY} = \frac{d\Phi}{dY} + \Omega + Y \frac{\partial \Omega}{\partial Y}$$

Or : $\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = -X \frac{\partial \Omega}{\partial Y}$; d'où $\frac{dH}{dY} = (Y-X)\left(-\frac{G'}{X-Y} + \frac{\Omega}{X-Y}\right) + \Omega$

ou enfin : $\frac{dH}{dY} = G'$

et : $H = G(Y)$

On tire donc :

$$\Phi = -Y \frac{F-G}{X-Y} + G$$

ou :

$$\Phi = \frac{-YF+YG+XG-YG}{X-Y}$$

$$\Phi = \frac{X\,G(Y) - YF(X)}{X-Y}$$

Ceci nous permet d'avoir l'expression de ϕ

$$\phi = 2\,\frac{a_3\,(X\,G - Y\,F) - C\,(F-G)}{X - Y}$$

F détermine la distribution générale de densité et G le degré d'aplatissement .

6 - DETERMINATION DE LA DENSITE DE MASSE :

L'équation de Poisson permet de calculer la densité de matière ρ qui a créé le potentiel gravitationnel

On a en effet :

$$\Delta\Omega = \frac{\partial^2\Omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\Omega}{\partial R} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} = -\rho$$

Pour le cas (β_4) où $a_3 \neq 0$, $a_o = a_4$ on trouve :

$$\Delta\Omega = \frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\chi^2} - \frac{\partial\Omega}{\partial\chi}\,tg\chi\right)$$

et $$-\rho = \frac{1}{r^4}\left[r^2 F''(r) - 2rF'(r) + 2F(r) - 2G(\chi) - G'(\chi)\,tg\chi + G''(\chi)\right.$$

Pour le cas (β_2) où $a_3 \neq 0$, $a_o \neq a_4$ on a :

$$-\rho = 6\,\frac{XF' + YG'}{(X-Y)^2} - 2B\,\frac{F'+G'}{(X-Y)^2} + 2\,\frac{F-G}{(X-Y)^3}\,(X+Y+2B)$$

$$- 8\,\frac{F'(X^2-B^2)}{(X-Y)^3} + 8\,\frac{G'(Y^2-B^2)}{(X-Y)^3} + 4\,\frac{F''(X^2-B^2)}{(X-Y)^2} + 4\,G''\,\frac{(Y^2-B^2)}{(X-Y)^2}$$

Etant donné la définition de f, le nombre ν de particules contenues dans un élément de volume est :

$$\nu = \int_{\pi}\int_{\Theta}\int_{Z=-\infty}^{+\infty} f\,(\phi + \omega R\Theta + a\pi^2 + b\Theta^2 + cZ^2 + 2g\pi Z)\,d\pi\,d\Theta\,dZ$$

Posons :

$$\Theta' = \Theta + \frac{\omega R}{2b}$$

$$\mathcal{V} = \iiint_{\pi\,\Theta' Z\,;\,-\infty}^{+\infty} f\left\{(\phi - \frac{\omega^2 R^2}{4b}) + a\pi^2 + b\Theta'^2 + cZ^2 + 2gZ\pi\right\} d\pi\, d\Theta'\, dZ$$

La quadrique $a\pi^2 + b\Theta'^2 + cZ^2 + 2gZ\pi = 1$ s'écrit ainsi si elle est rapportée à ses axes principaux :

$$\delta_1^2 u^2 + \delta_2^2 v^2 + \delta_3^2 w^2 = 1$$

et l'on a : $$\delta_1^2\, \delta_2^2\, \delta_3^2 = \Delta = \begin{vmatrix} a & o & g \\ o & b & o \\ g & o & c \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \iiint_{u,v,w\,;\,-\infty}^{+\infty} f\left\{(\phi - \frac{\omega^2 R^2}{4b}) + \delta_1^2 u^2 + \delta_2^2 v^2 + \delta_3^2 w^2\right\} du.dv\, dw$$

Cette intégrale triple est aisément ramenée à une intégrale simple en faisant le changement de variables :

$$\delta_1 u = V \sin\theta \cos\psi$$

$$\delta_2 v = V \sin\theta \sin\psi$$

$$\delta_3 w = V \cos\theta$$

On a $du, dv, dw = \frac{D(u,v,w.)}{D(V,\theta,\psi)}\, dV\, d\theta\, d\psi$

ou encore :

$$du\, dv\, dw = \frac{1}{\delta_1 \delta_2 \delta_3}\, V^2 \sin\theta\, dV\, d\theta\, d\psi$$

$$\nu = \frac{\cdot 2}{\Delta^{1/2}} = \int_c^{\infty} (\phi - \frac{\omega^2 R^2}{4b} + v^2) v^2 dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\psi$$

$$\nu = \frac{4\pi}{\Delta^{1/2}} g(\phi^x) \quad \text{avec} \quad \phi^x = \phi - \frac{\omega^2 R^2}{4b} \text{ et } g(p2) = \int_{q=o}^{\infty} f(p^2+q^2) q^2 dq$$

On ne connait pas la fonction définie $g(\phi^x)$ puisqu'on n'a pas specifié l'expression de f.

Si toutes les particules ont la même masse m_1 on a une relation simple entre ρ et ν soit $\rho = \nu m_1$

$\frac{\rho}{\nu}$ est une constante représentant la masse d'une particule. Nous allons montrer que dans ce cas on ne peut pas trouver de potentiel créé seulement par les particules du système. Nous allons traiter ce problème restreint par ces deux hypothèses dans le paragraphe suivant

7 - AUCUN SYSTEME D'ETOILES DE MASSES EGALES NE PEUT ETRE EN EQUILIBRE SOUS L'ACTION DU POTENTIEL GRAVITATIONNEL Ω CREE PAR L'ENSEMBLE DE CES ETOILES SEULEMENT -

$$\Delta\Omega = \frac{m}{\Delta^{1/2}} g(\phi^x)$$

m est une constante

Cette égalité peut s'écrire :

$$\Delta^{1/2} \Delta\Omega = m g(\phi^x)$$

En dérivant les deux membres de cette équation par rapport à X et Yil est facile de tirer l'identité suivante :

$$\frac{\partial \phi^x}{\partial Y}\left[2\Delta \frac{\partial}{\partial X}(\Delta\Omega) + \frac{\partial \Delta}{\partial X}\Delta\Omega\right] = \frac{\partial \phi^x}{\partial X}\left[2\Delta \frac{\partial}{\partial Y}\Delta\Omega + \frac{\partial \Delta}{\partial Y}\Delta\Omega\right] \quad (a)$$

Le calcul de Δ donne :

$$\Delta = b(ac-g^2)$$

$$\Delta = b\left[(a_o+z^2a_3)(a_4+R^2a_3)-R^2z^2a_3^2\right]$$

$$\Delta = b\left[a_o\,a_4+a_o\,a_3R^2+a_3\,a_4z^2\right]$$

$$\Delta = b\left[a_oa_4+\frac{a_oa_3}{2B}(X+B)(Y+B) - \frac{a_3a_4}{2B}(X-B)(Y-B)\right]$$

$$\Delta = b\left[a_oa_4+\frac{a_oa_3}{2B}(XY+BX+BY+B^2) - \frac{a_3a_4}{2B}(XY-BX-BY+B^2)\right]$$

$$\Delta = b\left[a_oa_4+a_3\frac{XY}{2B}(a_o-a_4)+\frac{a_3}{2}(X+Y)(a_o+a_4)+\frac{a_3B}{2}(a_o-a_4)\right]$$

$$\Delta = b\left[a_oa_4+a_3^2XY + CXa_3+ CYa_3+ a_3^2B^2\right]$$

$$\Delta = b\left[a_3CX + a_3CY + a_3^2XY + C^2\right]$$

$$\Delta = b\,(a_3X+C)\,(a_3Y+C)$$

Remplaçons Δ par sa valeur dans (a). On obtient :

(a) :
$$\frac{\partial\phi^x}{\partial Y}\left\{2b(a_3X+C)(a_3Y+C)\frac{\partial}{\partial X}\Delta\Omega+(a_3Y+C)\Delta\Omega\left[a_3b+(a_3X+C)\frac{\partial b}{\partial X}\right]\right\} =$$
$$=\frac{\partial\phi^x}{\partial X}\left\{2b(a_3X+C)(a_3Y+C)\frac{\partial}{\partial Y}\Delta\Omega+\Delta\Omega(a_3X+C)\left[a_3b+(a_3Y+C)\frac{\partial b}{\partial Y}\right]\right\}$$

Posons : $U_2 = (2Bb)^2(X-Y)^2\ \frac{\partial\phi^x}{\partial X}\Big/(a_3Y+C)$

$$V_2 = (2Bb)^2(X-Y)^2\ \frac{\partial\phi^x}{\partial Y}\Big/(a_3X+C)$$

L'équation (a)' s'écrit sous la forme suivante :

$$(a_3X+C)\frac{V_2}{(2Bb)^2(X-Y)^2}\,2b(a_3X+C)(a_3Y+C)\frac{\partial}{\partial X}\Delta\Omega+\Delta\Omega(a_3Y+C)\left[a_3b+(a_3X+C)\frac{\partial b}{\partial X}\right]\Bigg\} =$$

$$=\frac{a_3\,Y+C}{(2Bb)^2(X-Y)^2}\,U_2\left\{2b(a_3X+C)(a_3Y+C)\frac{\partial}{\partial Y}\Delta\Omega+\Delta\Omega(a_3X+C)\left[a_3b+(a_3Y+C)\frac{\partial b}{\partial Y}\right]\right\}$$

Divisons les deux membres de cette équation par $(a_3X+C)(a_3Y+C)$. On obtient :

$$\frac{V_2}{(2Bb)^2(X-Y)^2}\left\{2b(a_3X+C)\frac{\partial}{\partial X}\Delta\Omega+\Delta\Omega\left[a_3b+(a_3X+C)\frac{\partial b}{\partial X}\right]\right\}=$$

$$=\frac{U_2}{(2Bb)^2(X-Y)^2}\left\{2b(a_3Y+C)\frac{\partial}{\partial Y}\Delta\Omega+\Delta\Omega\left[a_3b+(a_3Y+C)\frac{\partial b}{\partial Y}\right]\right\}$$

Posons de même pour simplifier l'écriture de (a)' :

$$W = (X-Y)^3\Delta\Omega$$

$$U_1 = (X-Y)^4\frac{\partial}{\partial X}\Delta\Omega$$

$$V_1 = (X-Y)^4\frac{\partial}{\partial Y}\Delta\Omega$$

L'équation précédente devient :

$$\frac{V_2}{(2Bb)^2(X-Y)^2}\left\{2b(a_3X+C)\frac{U_1}{(X-Y)^4}+a_3b\,\frac{W}{(X-Y)^3}+(a_3X+C)\frac{\partial b}{\partial X}\,\frac{W}{(X-Y)^3}\right\}=$$

$$=\frac{U_2}{(2Bb)^2(X-Y)^2}\left\{2b(a_3Y+C)\frac{V_1}{(X-Y)^4}+a_3b\,\frac{W}{(X-Y)^3}+(a_3Y+C)\frac{\partial b}{\partial Y}\,\frac{W}{(X-Y)^3}\right\}$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $(2Bb)^2(X-Y)^6$.

Il vient :

(A)
$$V_2\left\{2b(a_3X+C)U_1+a_3b(X-Y)W+(a_3X+C)\frac{\partial b}{\partial X}(X-Y)W\right\}=$$
$$=U_2\left\{2b(a_3Y+C)V_1+a_3b(X-Y)W+(a_3Y+C)\frac{\partial b}{\partial Y}(X-Y)W\right\}$$

Les expressions de $W, U_1, V_1 U_2, V_2$ en fonction de X et Y sont données par :

$$W = 6(XF'+YG')(X-Y)-2B(F'+G')(X-Y)+2(F-G)(X+Y+2B)$$
$$-8F'(X^2-B^2)+8G'(Y^2-B^2)+4F''(X^2-B^2)(X-Y)+4G''(Y^2-B^2)(X-Y)$$

$$U_1 = 6(F'+XF'')(X-Y)^2-2BF''(X-Y)^2+2(F-G)(X-Y)$$
$$+ 2F'(X+Y+2B)(X-Y)-16F''(X^2-B^2)(X-Y)-16F'X(X-Y)$$
$$+ 4F'''(X^2-B^2)(X-Y)^2+8F''X(X-Y)^2-12(XF'+YG')(X-Y)$$
$$+ 4B(F'+G')(X-Y)-6(F-G)(X+Y+2B)+24F'(X^2-B^2)$$
$$-24G'(Y^2-B^2)-8G''(Y^2-B^2)(X-Y)$$

$$V_1 = 6(G'+YG'')(X-Y)^2-2BG''(X-Y)^2+2(F-G)(X-Y)$$
$$- 2G'(X+Y+2B)(X-Y)+16G''(Y^2-B^2)(X-Y)+16G'Y(X-Y)$$
$$+ 4G'''(Y^2-B^2)(X-Y)^2+8G''Y(X-Y)^2+12(XF'+YG')(X-Y)$$
$$- 4B(F'+G')(X-Y)+6(F-G)(X+Y+2B)-24F'(X^2-B^2)$$
$$+24G'(Y^2-B^2)+8F''(X^2-B^2)(X-Y)$$

$$U_2 = 2(2Bb)^2\left\{F-G-F'(X-Y)\right\}-\frac{1}{2}\omega^2B(Y+B)(X-Y)^2$$

$$V_2 = 2(2Bb)^2\left\{G-F-G'(Y-X)\right\}-\frac{1}{2}\omega^2B(X+B)(X-Y)^2$$

Pour le problème étudié dans ce paragraphe $\int \sim \frac{M}{r}$

On a donc $F(X) \sim X^{1/2}$ puisque $X \sim r^2$ pour r grand.

On pourra faire l'étude de (A) seulement par des équations qui en sont dérivées et qui sont des conditions nécessaires de son existence en posant (pour les grandes valeurs de r où $X \sim r^2$)

$$F(X) = MX^{1/2} + d_c X^c + \xi \qquad \text{avec } 0 < c < \frac{1}{2}$$

M est une constante proportionnelle à la masse supposée finie du système.

On tire : $F'(X) = \frac{1}{2} MX^{-1/2} + d_c c X^{c-1} + \xi'$

$$F''(X) = -\frac{1}{4} MX^{-3/2} + d_c c(c-1)X^{c-2} + \xi''$$

$$F'''(X) = \frac{3}{8} MX^{-5/2} + d_c c(c-1)(c-2)X^{c-3} + \xi'''$$

Les termes principaux de W proviennent des produits XF, X^2F', X^3F'' :

$$W \sim 0 \times MX^{3/2} + 2d_c(c-1)(2c-1)X^{c+1}$$

$$W \sim 2d_c(c-1)(2c-1)X^{c+1}$$

De même :

$$U_1 \sim 0 \times MX^{3/2} + 2d_c(2c-1)(c-1)(c-2)X^{c+1}$$

$U_1 \sim 2d_c(2c-1)(c-1)(c-2)\, X^{c+1}$ Les termes en $X^{3/2}$ proviennent aussi de X^4F

$$V_1 \sim 6G' + 6YG'' - 2BG'' - 2G' + 4G\,(Y^2 - B^2) + 8G''Y$$

$$V_1 \sim 4G'''(Y^2 - B^2) + 14G''Y - 2BG'' + 4G'$$

$$U_2 \sim 8B^2\left[\frac{a_3^2}{4B^2}(Y-B)^2+\frac{a_2}{4B^2}(Y+B)^2-2\frac{a_2a_3}{4B^2}(Y^2-B^2)\right]\frac{M}{2}X^{5/2}$$

$$V_2 \sim \left\{8B^2\left[\frac{a_3}{2B}(Y-B)-\frac{a_2}{2B}(Y+B)\right]^2G'-\frac{1}{2}\omega^2B\right\}X^3$$

$$V_2 \sim \left\{2G'\left[(a_2-a_3)Y+(a_2+a_3)B\right]^2-\frac{1}{2}\omega^2B\right]X^3$$

Calculons les termes de plus haut degré du premier membre de l'équation (A).

Notons d'abord que :

$$b = a_o-\frac{a_3}{2B}(XY-XB-YB+B^2)+\frac{a_2}{2B}(XY+XB+BY+B^2)$$

$$\frac{\partial b}{\partial X} = -\frac{a_3}{2B}(Y-B)+\frac{a_2}{2B}(Y+B)$$

$$\frac{\partial b}{\partial Y} = -\frac{a_3}{2B}(X-B)+\frac{a_2}{2B}(X+B)$$

Les termes de plus haut degré cherchés proviennent des produits suivants :

$$\left\{2G'\left[(a_2-a_3)Y+(a_2+a_3)B\right]^2-\frac{1}{2}\omega^2B\right\}X^3 \times$$

$$\times 2\left[a_o-\frac{a_3}{2B}(XY-XB-YB+B^2)+\frac{a_2}{2B}(XY+XB+BY+B^2)\right](a_3X+C)\times$$

$$\times 2d_c(2c-1)(c-1)(c-2)X^{c+1}$$

$$+a_3\left[a_o-\frac{a_3}{2B}(XY-XB-YB+B^2)+\frac{a_2}{2B}(XY+XB+BY+B^2)(X-Y)\right]2d_c(2c-1)(c-1)X^{c+1}$$

$$+(a_3X+C)\left[-\frac{a_3}{2B}(Y-B)+\frac{a_2}{2B}(Y+B)\right](X-Y)\,2d_c(2c-1)(c-1)X^{c+1}$$

On aura pour coefficient des X de plus haut degré :

$$\left\{2G'\left[(a_2-a_3)Y+(a_2+a_3)B\right]^2-\frac{1}{2}\omega^2B\right\}X^3$$

$$\times\left\{\left[-\frac{a_3^2}{B}Y+a_3^2+\frac{a_2a_3}{B}Y+a_3a_2\right]2d_c(2c-1)(c-1)(c-2)X^{3+c}\right.$$

$$+\left[-\frac{a_3^2}{B}Y+\frac{a_3^2}{2}+\frac{a_3a_2}{2B}Y+\frac{a_3a_2}{2}\right]2d_c(2c-1)(c-1)X^{3+c}$$

$$\left.+\left[-\frac{a_3^2}{2B}Y+\frac{a_3^2}{2}+\frac{a_3a_2}{2B}Y+\frac{a_3a_2}{2}\right]2d_c(2c-1)(c-1)X^{3+c}\right\}$$

soit : $\left\{2G'\left[(a_2-a_3)Y+(a_2+a_3)B\right]^2-\frac{1}{2}\omega^2B\right\}\times X^{6+c}$

$$\times 2d_c(2c-1)(c-1)\left[-\frac{a_3^2}{B}+a_3^2+\frac{a_3a_2}{B}Y+a_3a_2+2\frac{a_3^2}{B}Y-2a_3^2-2\frac{a_2a_3}{B}Y\right.$$

$$\left.-2a_3a_2-\frac{cY}{B}a_3^2+ca_3^2+\frac{cY}{B}a_2a_3+ca_3a_2\right]$$

ou encore :

$$\left\{2G'\left[(a_2-a_3)Y+(a_2+a_3)B\right]^2-\frac{1}{2}\omega^2B\right\}(X^{6+c})\times$$

$$\times 2d_c(2c-1)(c-1)\left[\frac{a_3^2}{B}Y(1-c)+a_3^2(c-1)+\frac{a_3a_2}{B}Y(c-1)+a_3a_2(c-1)\right]$$

ou enfin :

$$2d_c(2c-1)(c-1)^2\left[-\frac{a_3^2}{B}Y+a_3^2+\frac{a_3a_2}{B}Y+a_3a_2\right]\times$$

$$\times\left\{2G'\left[(a_2-a_3)Y+(a_2+a_3)B\right]^2-\frac{1}{2}\omega^2B\right\}(X^{6+c})$$

On aura pour coefficient des X de plus haut degré :

$$\left\{2G'\left[(a_2-a_3)Y+(a_2+a_3)B\right]^2-\frac{1}{2}\omega^2B\right\}X^3$$

$$\times\left\{\left[-\frac{a_3^2}{B}Y+a_3^2+\frac{a_2a_3}{B}Y+a_3a_2\right]2d_c(2c-1)(c-1)(c-2)X^{3+c}\right.$$

$$+\left[-\frac{a_3^2}{B}Y+\frac{a_3^2}{2}+\frac{a_3a_2}{2B}Y+\frac{a_3a_2}{2}\right]2d_c(2c-1)(c-1)X^{3+c}$$

$$\left.+\left[-\frac{a_3^2}{2B}Y+\frac{a_3^2}{2}+\frac{a_3a_2}{2B}Y+\frac{a_3a_2}{2}\right]2d_c(2c-1)(c-1)X^{3+c}\right\}$$

soit : $\left\{2G'\left[(a_2-a_3)Y+(a_2+a_3)B\right]^2-\frac{1}{2}\omega^2B\right\}\times X^{6+c}$

$$\times 2d_c(2c-1)(c-1)\left[-\frac{a_3^2}{B}+a_3^2+\frac{a_3a_2}{B}Y+a_3a_2+2\frac{a_3^2}{B}Y-2a_3^2-2\frac{a_2a_3}{B}Y\right.$$

$$\left.-2a_3a_2-\frac{cY}{B}a_3^2+ca_3^2+\frac{cY}{B}a_2a_3+ca_3a_2\right]$$

ou encore :

$$\left\{2G'\left[(a_2-a_3)Y+(a_2+a_3)B\right]^2-\frac{1}{2}\omega^2B\right\}(X^{6+c})\times$$

$$\times 2d_c(2c-1)(c-1)\left[\frac{a_3^2}{B}Y(1-c)+a_3^2(c-1)+\frac{a_3a_2}{B}Y(c-1)+a_3a_2(c-1)\right]$$

ou enfin :

$$2d_c(2c-1)(c-1)^2\left[-\frac{a_3^2}{B}Y+a_3^2+\frac{a_3a_2}{B}Y+a_3a_2\right]\times$$

$$\times\left\{2G'\left[(a_2-a_3)Y+(a_2+a_3)B\right]^2-\frac{1}{2}\omega^2B\right\}(X^{6+c})$$

Cherchons de même les termes de plus haut degrédu second membre de l'équation (A). Nous chercherons d'abord leur degré car s'il est inférieur à 6+c il n'y a pas lieu de trouver leur coefficient.

Les trois termes du second membre ont les degrés suivants

$$X^{5/2} \cdot 2\left[-\frac{a_3}{2B}(Y-B)+\frac{a_2}{2B}(Y+B)\right] \cdot X \cdot X^2 \longrightarrow X^{11/2} \quad \text{(degré 5,5)}$$

$$+ \quad X^{5/2}\left[a_3 - \frac{a_3}{2B}(Y-B)+\frac{a_2}{2B}(Y+B)\right] \cdot X \cdot X \cdot X^{c+1} \longrightarrow X^{11/2+c} \quad \text{(degré 5,5+c)}$$

$$+ \quad X^{5/2} \cdot X X \cdot X^{c+1} \longrightarrow X^{1/2+c} \quad \text{(degré 5,5+c)}$$

On voit que les termes cherchés sont de l'ordre de $X^{5,5+c}$ 5,5+c est inférieur à 6+c; il en résulte que le coefficient de X^{6+c} est nul ce qui donne l'équation :

$$G'\left[(a_2-a_3)Y+(a_2+a_3)B\right]^2 = \frac{1}{4}\omega^2 B \quad (B) \quad \text{(on suppose } a_2 \neq a_3\text{)}$$

et l'égalité $d_c = 0$

Considérons le premier cas $d_c = 0$. On a alors :

$$F(X) = MX^{1/2} + d_o + b_c X^{-c} + \ldots \qquad \text{avec } c > 0$$

Ce qui donne :

$$F'(X) = \frac{1}{2} MX^{-1/2} + \ldots$$

$$F''(X) = -\frac{1}{4} MX^{-3/2} + \ldots$$

$$F'''(X) = \frac{3}{8} MX^{-5/2} + \ldots$$

Ici encore les termes de plus haut degré du premier membre doivent avoir un coefficient nul.

Les termes de plus haut degré de V_2 qui sont en X^3 sont les mêmes que précédemment. L'équation (B) doit encore être satisfaite.

W donne :

$$\left[+4G''(Y^2-B^2)+6G'Y-2BG'+2(d_o-G)\right] . X$$

U_1 donne :

$$\left[-8G''(Y^2-B^2)-12G'Y-4(d_o-G)+4BG'\right] . X$$

Le facteur de V_2 dans le premier membre donne, sachant que les termes contenant M comme facteur s'annulent :

$$\left[\frac{a_2a_3}{B}(Y+B) - \frac{a_3^2}{B}(Y-B)\right] 4\left[-2G''(Y^2-B^2) -3G'Y-(d_o-G)+BG'\right]X^3$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{a_2a_3}{B}(Y+B)- \frac{a_3^2}{B}(Y-B)\right]2\left[2G''(Y^2-B^2)+3G'Y-BG'+(d_o-G)\right] X^3$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{a_2a_3}{B}(Y+B)- \frac{a_3^2}{B}(Y-B)\right]2\left[2G''(Y^2-B^2)+3G'Y-BG'+(d_o-G)\right] X^3$$

ou

$$3X^3\left\{- \frac{a_3}{B}\left[(a_2-a_3)Y+(a_2+a_3)B\right]\left[4G''(Y^2-B^2)+6G'Y-2G'B-2(G-d_o)\right]\right\}$$

On doit donc avoir :

$$4G''(Y^2-B^2)+6G'Y-2G'B-2(G-d_o) = 0 \quad (C)$$

Il faut donc que ou (B) ou (C) ait lieu pour que le problème posé soit possible

1° cas (B) vérifiée:

$$G'\left[(a_2-a_3)Y+ (a_2+a_3)B\right]^2 = \frac{1}{4}\omega^2 B$$

Cette équation donne facilement G par intégration

$$G = G_o - \frac{1}{4}\omega^2 B\left\{\frac{1}{\left[(a_2-a_3)Y+(a_2+a_3)B\right](a_2-a_3)}\right\}$$

$$G \sim G_o + \frac{1}{Y} \text{ en degré}$$

$$G' \sim \frac{1}{Y^2}$$

$$G'' \sim \frac{1}{Y^3}$$

$$G''' \sim \frac{1}{Y^4}$$

(A) devient un polynôme en Y si on en multiplie les deux membre par $\left[(a_2-a_3)Y+(a_2+a_3)B\right]$. Cherchons les termes de plus haut degré qui proviennent du second membre.

U_2 donne :

$$Y^3\left\{8B^2\left[\left(\frac{a_2-a_3}{2B}\right)^2X^2+\left(\frac{a_2+a_3}{2B}\right)^2B^2+\frac{2}{4B^2}(a_2-a_3)(a_2+a_3)XB\right]F'-\frac{1}{2}\omega^2 B\right\}$$

ou encore :

$$2\left[(a_2-a_3)^2X^2+(a_2+a_3)^2B^2+2(a_2-a_3)(a_2+a_3)XB\right]F'Y^3-\frac{1}{2}\omega^2 BY^3$$

Les termes : $2b(a_3Y+C)V_1$, $a_3b(X-Y)W$, $(a_3Y+C)\frac{\partial b}{\partial Y}(X-Y)W$

donnent respectivement (les termes de V_1, W sont en Y et ont pour facteur des termes en F, F', F'', G_o) :

$$2\left[-\frac{a_3^2}{2B}(X-B)+\frac{a_2a_3}{2B}(X+B)\right]2\left[-6XF'+2BF'+2(F-G_o)-4F''(X^2-B^2)\right]Y^3$$

$$-\left[-\frac{a_3^2}{2B}(X-B)+\frac{a_2a_3}{2B}(X+B)\right]\left[-6XF'+2BF'+2(F-G_o)-4F''(X^2-B^2)\right]Y^3$$

$$-\left[-\frac{a_3^2}{2B}(X-B)+\frac{a_2a_3}{2B}(X+B)\right]\left[-6XF'+2BF'+2(F-G_o)-4F''(X^2-B^2)\right]Y^3$$

On obtient pour coefficient du terme en Y^{11} après multiplication par $(a_2-a_3)^5Y^5$

$$(a_2-a_3)^5\times\left\{2\left[(a_2-a_3)X+(a_2+a_3)B\right]^2 F'-\frac{1}{2}\omega^2B\right\} \times$$

$$\times 2\left[4F''(X^2-B^2)+6XF'-2BF'-2(F-G_o)\right]\frac{a_3}{2B}\left[X(a_3-a_2)-B(a_3+a_2)\right]$$

Ce coefficient doit être nul ce qui donne :

soit : $2\left[(a_2-a_3)X+(a_2+a_3)B\right]^2F'-\frac{1}{2}\omega^2B = 0$

soit : $(a_3-a_2)X-B(a_3+a_2)\ 2a_3\left[4F''(X^2-B^2)+6F'X-2F'B-2(F-G_o)\right] = 0$

La première condition intégrée donne :

$$F = F_o - \frac{1}{4}\omega^2B\left\{\frac{1}{\left[(a_2-a_3)X+(a_2+a_3)B\right](a_2-a_3)}\right\}$$

Cette condition n'est pas valable car elle impose une fonction non équivalente à $MX^{1/2}$ comme nous l'avons supposé au début de ces calculs. F doit donc satisfaire la deuxième condition et on doit avoir :

$$2F''(X^2-B^2) + 3F'X-F'B-(F-G_o) = 0$$

qui s'intègre facilement pour donner :

$$2F'(X^2-B^2) - (F-G_o)\ (X+B) = A$$

Elle donne d'autre part par dérivation :

$$2F'''(X^2-B^2) + 7F''X-F''B+2F' = 0$$

Ces trois équations permettent d'avoir W, U_1, V_1 en fonction de G et Y seulement.

Ainsi on a :

$$W = 4G''(Y^2-B^2)(X-Y)+8G'(Y^2-B^2)-2BG'(X-Y)+6YG'(X-Y)$$

$$+ 4F''(X^2-B^2)(X-Y)+(6XF'-2BF')(X-Y)$$

$$- 8F'(X^2-B^2)$$

$$+ 2(F-G)(X+Y+2B)$$

Ce qui peut s'écrire :

$$W = \left[4G''(Y^2-B^2)+6G'Y-2G'B\right](X-Y) + 8G'(Y^2-B^2)$$

$$+ 2(F-G_o)(X-Y)$$

$$- 4A - 4(F-G_o)(X+B)+2(F-G)(X+Y+2B)$$

Ou encore :

$$W = \left[4G''(Y^2-B^2)+6G'Y-2G'B\right](X-Y) + 8G'(Y^2-B^2)$$

$$- 4A - 2G_o(X-Y)+4G_o(X+B)-2G(X+Y+2B)$$

Ou :

$$W = 4G''(Y^2-B^2)+6G'Y-2G'B\ (X-Y)+8G'(Y^2-B^2)$$

$$- 4A + 2(G_o-G)\ (X+Y+2B)$$

Ou :

$$W = \left[4G''(Y^2-B^2)+6G'Y-2G'B\right](X-Y)+8G'(Y^2-B^2)$$

$$- 4A - 2(G-G_o)(X-Y) - 4(G-G_o)(Y+B)$$

Ou enfin :

$$W = \left[4G''(Y^2-B^2)+6G'Y-2G'B-2(G-G_o)\right](X-Y)+8G'(Y^2-B^2)$$

$$- 4\ (G-G_o)(Y+B) -4A$$

On obtiendra de même :

$$U_1 = -\left\{8G''(Y^2-B^2)+12G'Y-4G'B-4(G-G_o)\right\}(X-Y)$$
$$-24G'(Y^2-B^2)+12(G-G_o)(Y+B)+12A$$

et :

$$V_1 = \left\{4G'''(Y^2-B^2)+14G''Y-2G''B+4G'\right\}(X-Y)^2$$
$$+\left\{16G''(Y^2-B^2)+24G'Y-8G'B-8(G-G_o)\right\}(X-Y)$$
$$+ 24G'(Y^2-B^2)-12(G-G_o)(Y+B)-12A$$

Les quantités qui interviennent dans $W, U_1 V_1$ sont à un facteur près :

$2G'(Y^2-B^2)-(G-G_o)(Y+B)$ et ses dérivées premières et secondes.

$$2G'(Y^2-B^2)-(G-G_o)(Y+B) = \frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}\left[2\frac{(Y^2-B^2)}{\left(Y+\frac{a_2+a_3}{a_2-a_3}B\right)^2} + \frac{Y+B}{Y+\frac{a_2+a_3}{a_2-a_3}B}\right]$$

Posons :

$$B\frac{a_2+a_3}{a_2-a_3} = D \quad \text{On a :}$$

$$2G'(Y^2-B^2)-(G-G_o)(Y+B) = \frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}\left[\frac{2(Y^2-B^2)}{(Y+D)^2} + \frac{Y+B}{Y+D}\right]$$

Ou encore :

$$2G'(Y^2-B^2)-(G-G_o)(Y+B) = \frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}\left[\frac{2(Y^2-B^2)}{(Y+D)^2} -2+2+ \frac{Y+B}{Y+D} -1+1\right]$$

Le deuxième membre de cette équation s'écrit encore :

$$-2\frac{B^2+D^2}{(Y+D)^2} - \frac{4D}{Y+D}\left(1 - \frac{D}{Y+D}\right) + \frac{B-D}{Y+D} + 3$$

On a donc :

$$\left[3-2\frac{B^2-D^2}{(Y+D)^2} + \frac{B-5D}{Y+D}\right]\frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2} = 2G'(Y^2-B^2)-(G-G_o)(Y+B)$$

On a d'autre part :

$$\frac{d}{dY}\left[2G'(Y^2-B^2)-(G-G_o)(Y+B)\right] = 2G''(Y^2-B^2)+3G'Y-G'B-(G-G_o)$$

et :

$$\frac{d}{dY}\left[2G''(Y^2-B^2)+3G'Y-G'B-(G-G_o)\right] = 2G'''(Y^2-B^2)+7G''Y+2G'-G''B$$

On aura donc les expressions suivantes pour W, U_1, V_1

$$W = \frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}\left[(X-Y)\left\{-2\,\frac{B-5D}{(Y+D)^2}+8\,\frac{B^2-D^2}{(Y+D)^3}\right\}+12+4\,\frac{B-5D}{Y+D}-8\,\frac{B^2-D^2}{(Y+D)^2}\right]-4A$$

$$U_1 = \frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}\left[(X-Y)\left\{4\,\frac{B-5D}{(Y+D)^2}-16\frac{B^2-D^2}{(Y+D)^3}\right\}-36-12\,\frac{B-5D}{Y+D}+24\,\frac{B^2-D^2}{(Y+D)^2}\right]+12A$$

$$V_1 = \frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}\left[(X-Y)^2\left\{4\,\frac{B-5D}{(Y+D)^3}-24\,\frac{B^2-D^2}{(Y+D)^4}\right\}-(X-Y)\left\{8\frac{B-5D}{(Y+D)^2}-32\,\frac{B^2-D^2}{(Y+D)^3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+36+12\,\frac{B-5D}{Y+D}-24\,\frac{B^2-D^2}{(Y+D)^2}\right]-12A\right.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (A) par $(Y+D)^5$.

En remplaçant W, U_1, V_1 par les expressions ci-dessus dans cette équation on obtient un polynôme du 10ème degré en Y, le terme de plus haut degré provenant du second membre de (A)

U_2 donne des termes en Y^3 de coefficient

$$8B^2\left[\frac{a_3^2}{4B^2}(X-B)^2+\frac{a_2^2}{4B^2}(X+B)^2-\frac{2a_3a_2}{4B^2}(X-B)(X+B)\right]F'-\frac{1}{2}\omega^2 B$$

Les 3 termes : $2b(a_3Y+C)V_1$, $a_3b(X-Y)W$, $(a_3Y+C)\,\frac{\partial b}{\partial Y}\,(X-Y)W$

donnent des termes en Y^2 qui sont respectivement :

$$2\left[-\frac{a_3}{2B}(X-B)+\frac{a_2}{2B}(X+B)\right]a_3\left[\frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}\times 36-12A\right]$$

$$-a_3\left[-\frac{a_3}{2B}(X-B)+\frac{a_2}{2B}(X+B)\right]\left[\frac{12\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}-4A\right]$$

$$-a_3\left[-\frac{a_3}{2B}(X-B)+\frac{a_2}{2B}(X+B)\right]\left[\frac{12\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}-4A\right]$$

Le coefficient du terme en Y^{10} donne :

$$2a_3\left[24\frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}-8A\right]\left[-\frac{a_3}{2B}(X-B)+\frac{a_2}{2B}(X+B)\right]\times$$

$$\times\left\{8B^2\left[-\frac{a_3}{2B}(X-B)+\frac{a_2}{2B}(X+B)\right]^2 F'-\frac{1}{2}\omega^2 B\right\}$$

Il s'écrit encore sous la forme :

$$2a_3\left[-8A+24\frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}\right]\frac{1}{2B}\left[X(a_2-a_3)+B(a_2+a_3)\right]\times$$

$$\times\left\{2\left[X(a_2-a_3)+B(a_2+a_3)\right]^2 F'-\frac{1}{2}\omega^2 B\right\}$$

ou encore :

$$2a_3\left[-8A+24\frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}\right]\frac{1}{2B}(a_2-a_3)(X+D)\times$$

$$\left\{2(a_2-a_3)^2(X+D)^2F'-\frac{1}{2}\omega^2 B\right\}$$

Le coefficient est nul. On doit donc avoir :

$2(a_2-a_3)^2(X+D)^2F'-\frac{1}{2}\omega^2 B = 0$ équation que l'on a déjà considéré comme étant contraire à l'hypothèse $F \sim M X^{1/2}$

Il reste la condition nécessaire suivante de la validité de l'équation (A) :

$$A = \frac{3\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}$$

Si A prend cette valeur W, U_1, V_1 multipliés par $(Y+D)^5$ ont un degré plus bas. Le terme de plus haut degré qui devient ϑ provient encore du second membre.

Cherchons son coefficient :

U_2 donne le terme en Y^3 suivant :

$$8B^2\left[\frac{a_3}{2B}(X-B) - \frac{a_2}{2B}(X+B)\right]^2 F' - \frac{1}{2}\omega^2 B$$

Les facteurs $2b(a_3Y+C)V_1$, $a_3b(X-Y)W$, $(a_3Y+C)\frac{\partial b}{\partial Y}(X-Y)\,W$

donnent respectivement :

$$2\left[-\frac{a_3}{2B}(X-B)+\frac{a_2}{2B}(X+B)\right]a_3\,\frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}\left[4(B-5D)+8(B-5D)+12(B-5D)\right]$$

$$-a_3\left[-\frac{a_3}{2B}(X-B)+\frac{a_2}{2B}(X+B)\,\frac{\omega^2}{4(a_2-a_3)^2}\left[2(B-5D)+4(B-5D)\right]\right.$$

$$-a_3\left[-\frac{a_3}{2B}(X-B)+\frac{a_2}{2B}(X+B)\left(\frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}\right)\left[2(B-5D)+4(B-5D)\right]\right.$$

Le coefficient de Y^4 est donc :

$$a_3\left[-\frac{a_3}{2B}(X-B)+\frac{a_2}{2B}(X+B)\right]\frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}(36B-180D)\left\{8B^2\left[\frac{a_3}{2B}(X-B)-\frac{a_2}{2B}(X+B)\right]^2\right.$$

$$\times F' - \frac{1}{2}\omega^2 B\Big\}$$

Ou encore :

$$\frac{\omega^2 B}{4(a_2-a_3)^2}(B-5D)\left\{2(a_2-a_3)^2(X+D)^2F' - \frac{1}{2}\omega^2 B\right\} 36a_3 \frac{a_2 a_3}{2B}(X+D)$$

Ce coefficient s'annule identiquement seulement si:

$$B = 5D \text{ ou } 5\ (a_2+a_3) = a_2-a_3$$

Ou encore :

$$2a_2 + 3a_3 = 0$$

Or a_2 et a_3 doivent tous les deux être positifs car nous avons supposé au début qu'il n'y avait pas un nombre fini de particules ayant une vitesse infinie.

La condition $2a_2+3a_3 = 0$ ne peut avoir lieu et il n'existe pas de solution générale du problème qui satisfasse la condition (B).

Pour faire la démonstration précédente nous avons supposé $a_2 \neq a_3$ et $a_0 \neq a_4$.

Considérons à présent le cas particulier $a_2 = a_3$

L'équation (B) devient :

$$4a_3^2 B^2 G' = \frac{1}{4}\omega^2 B$$

soit $G' = K$ et $G = KY + G_0$

Il est facile de voir que les termes de plus haut degré qui doivent s'annuler proviennent du second membre de l'identité (A).

Le facteur U_2 donne :

$$-8B^2b^2\ (K+F') - \frac{1}{2}\omega^2 B = 0$$

Cette équation ne donne pas une fonction F équivalente à $MX^{1/2}$ et elle ne peut avoir lieu.

Dans V_1,W les termes en Y^2 sont identiquement nuls. Les termes de plus haut degré cherchés sont de l'ordre de Y^3.

Cherchons les termes en Y dans W et V_1.

Dans W ils ont pour coefficient :

$$-6XF'+6XK+2BF'+2BK+2F-2G_o-2KX-4KB-4F''(X^2-B^2)$$

ou encore :

$$-4F''(X^2-B^2)\ -6XF'+2BF'+2(F-G_o)\ +2K(2X-B)$$

Dans V_1 ils ont pour coefficient :

$$-12KX-2F+2G_o-2KX+2KX+4KB-2KX+16KX-12XF'+12KX+4BF'+4KB+6F-6G_o-6KX$$

$$-12KB-8F''(X^2-B^2)$$

ou encore :

$$-8F''(X^2-B^2)-12F'X+4F'B+4(F-G_o)+4K\ (2X-B)$$

On sait que le coefficient de Y dans $\frac{\partial b}{\partial Y}$ est le même que celui de Y dans b.

On devra donc avoir :

$$(a)_1\ 2F''(X^2-B^2)+3F'X-F'B-(F-G_o)-K(2X-B)\ =\ 0$$

Cette équation intégrée donne :

$$(b)_1\ 2F'(X^2-B^2)-(F-G_o)(X+B)-KX^2+KBX\ =\ A_1$$

Cherchons l'expression de W compte tenu des deux conditions précédentes d'existence de (A).

$$W\ =\ 6X^2F'+6XYK-6XYF'-[illegible]F'-6Y^2K-2BF'X+2BF'Y$$

$$-\ 2BKX+2BKY+2FX+2FY+4FB-2(KY+G_o)X$$

$$-\ 2(KY+G_o)Y-4(KY+G_o)B-8F'(X^2-B^2)+8KY^2-8KB^2$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\left[4F''(X^2-B^2)+6XF'-2F'B\right](X-Y)-8F'(X^2-B^2)$$
$$+4KXY-2BKX-2BKY-2G_oX-2G_oY-4G_oB-8KB^2$$
$$+2FX+2FY+4FB$$

soit en ajoutant et en retranchant $2G_oX+2FX$

$$W=\left[4F''(X^2-B^2)+6XF'-2F'B\right](X-Y)-8F'(X^2-B^2)$$
$$+4KXY-2BKX-2BKY-2G_oX-2G_oY-4G_oB-8KB^2$$
$$+2FX+2FY+4FB+(2G_oX+2FX)-(2G_oX+2FX)$$

D'où :

$$W=\left[4F''(X^2-B^2)+6XF'-2F'B\right](X-Y)-2(F-G_o)(X-Y)$$
$$-8F'(X^2-B^2)+4(F-G_o)(X+B)$$
$$+4KXY-2BXK-2BKY-8KB^2$$

ou encore compte tenu des équations $(a)_1$ et $(b)_1$

$$2K(2X-B)(X-Y)-4KX^2+4KBX-4A_1+4KXY-2BXK-2BKY-8KB^2$$

Ce qui donne après réduction : $-12\ (A_1+2KB^2)$

Cherchons de même le terme V_1 :

$$V_1=6K(X-Y)^2+2(F-KY-G_o)(X-Y)-2K(X+Y+2B)(X-Y)$$
$$+16KY(X-Y)+12(XF'+YK)(X-Y)-4B(F'+K)(X-Y)$$
$$+6(F-KY-G_o)(X+Y+2B)-24F'(X^2-B^2)+24K(Y^2-B^2)$$
$$+8F''(X^2-B^2)(X-Y)$$

Ou :

$$V_1 = \left[8F''(X^2-B^2)+12F'X-4F'B\right](X-Y)$$
$$- 24F'(X^2-B^2)$$
$$+ 4KX^2+8KXY-4KBY-8KBX+8FX+4FY+12FB$$
$$-8\,G_oX-4G_oY-12G_oB-24KB^2$$
$$+(4FX-4G_oX)-(4FX-4G_oX)$$

Ce qui donne :

$$V_1 = \left[8F''(X^2-B^2)+12F'X-4F'B-4(F-G_o)\right](X-Y)$$
$$- 24F'(X^2-B^2)+12(F-G_o)(X+B)$$
$$+ 4KX^2+8KXY-4KBY-8KBX-24KB^2$$

soit en tenant compte des équations $(a)_1$ et $(b)_1$:

$$V_1 = 4K(2X-B)(X-Y)-12KX^2+12KBX-12A_1$$
$$+ 4KX^2+8KXY-4KBY-8KBX-24K^2B$$

ou enfin :

$$V_1 = -12(A_1+2KB^2)$$

Les termes de plus haut degré proviennent du second membre et contiennent comme facteur A_1+2KB^2 qui doit s'annuler pour que (A) soi valable. Or, s'il s'annule la densité est nulle en tout point puisque :

$$W = -\rho(X-Y)^3 \text{ et } V_1 = -(X-Y)^4\,\frac{\partial\rho}{\partial Y}$$

La solution est encore impossible dans ce cas particulier

La solution n'est valable que si l'une des conditions (B) ou (C) a lieu.

Nous avons montré qu'il n'y a pas de solution du problème avec la condition nécessaire (B) vérifiée.

Il reste à voir s'il y a possibilité de trouver une solution quand la condition (C) est vérifiée.

2° Cas (C) vérifiée :

$$4G''(Y^2-B^2)+6G'Y-2G'B-2(G-d_o) = 0$$

On intègre cette équation; ceci donne :

$$2G'(Y^2-B^2)-(G-d_o)(Y+B) = B$$

Cette équation différentielle linéaire s'intègre pour donner :

$$G = d_o+c_1(B-Y)^{1/2}-\frac{B_1}{2B}\left\{1-\sqrt{\frac{B-Y}{2B}}\,\text{argth}\,\sqrt{\frac{B-Y}{EB}}\right\}$$

On a en outre :

$$4G(Y^2-B^2)+14YG''-2BG''+4G' = 0$$

Ces équations vont nous permettre de simplifier l'expression de W, U_1 et V_1 et montrer qu'elle ne contient pas G ou ses dérivées.

Les termes en G dans W se mettent sous la forme :

$$(X-Y)\left[4G''(Y^2-B^2)+6G'Y-2G'B+8G'(Y^2-B^2)-2G(X+Y+2B)\right.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$4B-2d_o(Y+X+2B)$$

On a donc :

$$W = 6XF'(X-Y)-2BF'(X-Y)+2F(X+Y+2B)-8F'(X^2-B^2)$$

$$+ 4F''(X^2-B^2)(X-Y) + 4B-2d_o(Y+X+2B)$$

Les termes en G de U_1 s'écrivent ainsi :

$$2(X-Y)\left[2BG'-6YG'-4G''(Y^2-B^2)\right]-24G'(Y^2-B^2)$$

$$-2G(X-Y)+6G(X+Y+2B)$$

ou encore :

$$-12B+4d_o(X+2Y+3B)$$

soit :

$$U_1 = 6(F'+XF'')(X-Y)^2-2BF''(X-Y)^2+2F(X-Y) +$$

$$2F'(X+Y+2B)(X-Y)-16F''(X^2-B^2)(X-Y)-16F'X(X-Y)$$

$$+ 4F'''(X^2-B^2)(X-Y)^2+8F''X(X-Y)^2-12XF'(X-Y)$$

$$+ 4BF'(X-Y)-6F(X+Y+2B) +24F'(X^2-B^2)$$

$$+ 4d_o(X+2Y+3B)-12B$$

Les termes en G de V_1 s'écrivent :

$$(X-Y)^2\left[4G'''(Y^2-B^2)+14YG''-2BG''+6G'\right]$$

$$+(X-Y)\left[16G''(Y^2-B^2)+26YG'-8BG'-2G-2G'X\right.$$

$$+24G'(Y^2-B^2)-6G(X+Y+2B)$$

ou :

$$12B-4d_o(Y+2X+3B)$$

d'où :

$$V_1 = 2F(X-Y)+12XF'(X-Y)-4BF'(X-Y)$$

$$+ 6F(X+Y+2B)-24F'(X^2-B^2)+8F''(X^2-B^2)(X-Y)$$

$$+12B-4d_o(Y+2X+3B)$$

On voit que W, U_1, V_1 sont indépendants de G; W et V_1 contiennent Y à la première puissance ; U_1 contient Y à la seconde puissance.

Calculons U_2 et V_2 :

$$U_2 = 8B^2b^2\left\{F-d_o-c_1'(B-Y)^{1/2}+\frac{B_1'}{2B}\left[1-\sqrt{\frac{B-Y}{2B}}\,\text{argth}\sqrt{\frac{B-Y}{2B}}\right]\right.$$

$$\left. - F'(X-Y)\right\} - \frac{1}{2}\omega^2 B(Y+B)(X-Y)^2$$

$$V_2 = 8B^2b^2\left\{d_o+c(B-Y)^{1/2}-\frac{B_1'}{2B}\left[1-\sqrt{\frac{B-Y}{2B}}\,\text{argth}\sqrt{\frac{B-Y}{2B}}\right]-F'\left(\frac{Y-X}{2(Y^2-B^2)}\right)\right.$$

$$\left.-(Y-B)\frac{B_1'}{2B}\left[1-\sqrt{\frac{B-Y}{2B}}\,\text{argth}\sqrt{\frac{B-Y}{2B}}\right]\right\} - \frac{1}{2}\omega^2 B(X+B)(X-Y)^2$$

Portons ces valeurs de U_2 et V_2 dans (A) et cherchons le coefficient de $\text{argth}\sqrt{\frac{B-Y}{2B}}$

Onobtient :

$$P = 2(2Bb)^2\,\frac{B_1'}{2B}\,\frac{1}{\sqrt{2B}}\,(B-Y)^{1/2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{Y-X}{Y-B}\right)\times\right.$$

$$\times\left\{2b(a_3X+C)U_1+a_3b(X-Y)\;W+(a_3X+C)\,\frac{\partial b}{\partial X}\,(X-Y)W\right\}$$

$$\left.+\left\{2b(a_3Y+C)V_1+a_3b(X-Y)\;W+(a_3Y+C)\,\frac{\partial b}{\partial Y}\,(X-Y)\;W\right\}\right]$$

On a :

$$P \equiv 0$$

On suppose $B_1' \neq 0$ et on cherche le coefficient de Y^4 dans P qui divisé par les facteurs non nuls est un polynôme du 4e degré en Y (une fois multiplié par 2 (Y-B) le facteur $1-\frac{1}{2}\,\frac{Y-X}{Y-B}$ devient Y+X-2B et le dernier crochet se trouve être multiplié par 2(Y-B))

Après avoir noté que :

$$\frac{\partial b}{\partial X} = -\frac{a_3}{2B}\,(Y-B)+\frac{a_2}{2B}\,(Y+B)$$

Calculons U_2 et V_2 :

$$U_2 = 8B^2b^2\left\{F - d_o - c(B-Y)^{1/2} + \frac{B_1'}{2B}\left[1 - \sqrt{\frac{B-Y}{2B}}\,\operatorname{argth}\sqrt{\frac{B-Y}{2B}}\right]\right.$$

$$\left. - F'(X-Y)\right\} - \frac{1}{2}\omega^2 B(Y+B)(X-Y)^2$$

$$V_2 = 8B^2b^2\left\{d_o + c(B-Y)^{1/2} - \frac{B_1'}{2B}\left[1 - \sqrt{\frac{B-Y}{2B}}\,\operatorname{argth}\sqrt{\frac{B-Y}{2B}}\right] - F\left(\frac{Y-X}{2(Y^2-B^2)}\right)\right.$$

$$\left. - (Y-B)\frac{B_1'}{2B}\left[1 - \sqrt{\frac{B-Y}{2B}}\,\operatorname{argth}\sqrt{\frac{B-Y}{2B}}\right]\right\} - \frac{1}{2}\omega^2 B(X+B)(X-Y)^2$$

Portons ces valeurs de U_2 et V_2 dans (A) et cherchons le coefficient de $\operatorname{argth}\sqrt{\frac{B-Y}{2B}}$

Onobtient :

$$P = 2(2Bb)^2\,\frac{B_1'}{2B}\,\frac{1}{\sqrt{2B}}\,(B-Y)^{1/2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{Y-X}{Y-B}\right)\times\right.$$

$$\times\left\{2b(a_3X+C)U_1 + a_3b(X-Y)\,W + (a_3X+C)\,\frac{\partial b}{\partial X}\,(X-Y)W\right\}$$

$$\left. + \left\{2b(a_3Y+C)V_1 + a_3b(X-Y)\,W + (a_3Y+C)\,\frac{\partial b}{\partial Y}\,(X-Y)\,W\right\}\right]$$

On a :

$$P \equiv 0$$

On suppose $B_1' \neq 0$ et on cherche le coefficient de Y^4 dans P qui divisé par les facteurs non nuls est un polynôme du 4º degré en Y (une fois multiplié par 2 (Y-B) le facteur $1 - \frac{1}{2}\,\frac{Y-X}{Y-B}$ devient Y+X-2B et le dernier crochet se trouve être multiplié par 2(Y-B))

Après avoir noté que :

$$\frac{\partial b}{\partial X} = -\frac{a_3}{2B}\,(Y-B) + \frac{a_2}{2B}\,(Y+B)$$

On trouve pour coefficient de Y^4 :

$$2(a_3X+C)\left[6(F'+XF'')-2BF''-2F'+4F'''(X^2-B^2)+8F''X\right] \times$$

$$\times\left[X\left(\frac{a_2-a_3}{2B}\right)+\frac{a_2+a_3}{2}\right]-a_3\left[X\frac{a_2-a_3}{2B}+\frac{a_2+a_3}{2}\right]\times$$

$$\times\left[-6XF'+2BF'+2F-4F''(X^2-B^2)-2d_o\right]$$

$$-(a_3X+C)\frac{a_2-a_3}{2B}\left[-6XF'+2BF'+2F-4F''(X^2-B^2)-2d_o\right]$$

$$+2\Big\{2a_3\left[X\frac{a_2-a_3}{2B}+\frac{a_2+a_3}{2}\right]\left[-2F-12XF'+4BF'+6F-8F''(X^2-B^2)-4d_o\right]$$

$$-a_3\left[X\frac{a_2-a_3}{2B}+\frac{a_2+a_3}{2}\right]\left[-6XF'+2BF'+2F-4F''(X^2-B^2)-2d_o\right]$$

$$-a_3\left[X\frac{a_2-a_3}{2B}+\frac{a_2+a_3}{2}\right]\left[-6XF'+2BF'+2F-4F''(X^2-B^2)-2d_o\right]\Big\}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$2(a_3X+C)(X+D)2\left(\frac{a_2-a_3}{2B}\right)\left[2F'''(X^2-B^2)+7F''X-F''B+2F'\right]=$$

$$=2\left[F''(X^2-B^2)+3F'X-F'B-(F-d_o)\right]\left[\frac{a_2-a_3}{2B}(-a_3)(X+D)-(a_3X+C)\left(\frac{a_2-a_3}{2B}\right)\right.$$

$$+8a_3\frac{a_2-a_3}{2B}(X+D)-2a_3\frac{a_2-a_3}{2B}(X+D)$$

$$\left.-2a_3\frac{a_2-a_3}{2B}(X+D)\right]$$

Ou enfin :

$$2(a_3X+C)(X+D)\left[2F'''(X^2-B^2)+7F''X-F''B+2F'\right]=$$

$$=\left[3a_3(X+D)-(a_3X+C)\right]\left[2F''(X^2-B^2)+3F'X-F'B-(F-d_o)\right]$$

Posons : $2F''(X^2-B^2)+3F'X-F'B-(F-d_o) = \mathcal{A}$

L'équation précédente s'écrit :

$$\left[3a_3(X+D)-(a_3X+C)\right]\mathcal{A} = 2(a_3X+C)(X+D)\mathcal{A}\,;$$

En intégrant on obtient :

$$\int\frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{A}} = \int\frac{3a_3(X+D)-(a_3X+C)}{2(a_3X+C)(X+D)}\,dX$$

ou

$$\log\frac{\mathcal{A}}{D_1} = \log\frac{(a_3X+C)^{3/2}}{(X+D)^{1/2}}$$

Ou :

$$2F''(X^2-B^2)+3F'X-F'B-(F-d_o) = D_1(a_3X+C)^{3/2}(X+D)^{-1/2}$$

On a vu que $F-d_o \sim MX^{1/2}$

On a donc $D_1 = 0$ quand $X \to \infty$ car $\mathcal{A} \to 0$

Cette équation intégrée donne :

$$2F'(X^2-B^2)-(F-G_o)(X+B) = A$$

On est encore dans le cas étudié au début du 1° cas.

Si on remplace G, G', G'', G''' par leurs valeurs tirées de (C) et ses dérivées on obtient pour W, U_1, V_1 :

$$W = 4(B_1'-A)$$

$$U_1 = 12(B_1'-A)$$

$$V_1 = 12(B_1'-A)$$

On ne peut avoir $A=B_1'$ car la densité serait nulle en tous les points.

Le facteur $B_2'-A$ peut être retiré de l'équation P = 0 qui devient

$$\left[2(B-Y)-(X-Y)\right]\left[2b(a_3X+C)(-12)+a_3b(X-Y)4+(a_3X+C)\frac{\partial b}{\partial X}(X-Y)4\right]$$

$$+2(B-Y)\left[2b(a_3Y+C)12+a_3b(X-Y)4+(a_3Y+C)\frac{\partial b}{\partial Y}(X-Y)4\right]=0$$

ou encore :

$$(Y+X-2B)\left\{-6b(a_3X+C)+a_3b(X-Y)+(a_3X+C)\frac{\partial b}{\partial X}(X-Y)\right\}$$

$$+2(Y-B)\left\{6b(a_3Y+C)+a_3b(X-Y)+(a_3Y+C)\ \frac{\partial b}{\partial Y}\ (X-Y)\right\}\ =0$$

Cette équation ne peut être vérifiée que pour le cas sans intérêt où toutes les constantes seraient nulles.

On ne peut avoir $P = 0$ et on ne peut trouver de solution du problème satisfaisant la condition (C).

Il reste deux cas particuliers à considérer :

celui où $B_1'\equiv 0$ et celui où $B_1'\equiv c_1'\equiv 0$

Considérons le cas $B_1'\equiv 0$

On a alors :

$$G = d_o+c_1'(B-Y)^{1/2}$$

Il est facile de voir en portant cette valeur de G dans l'équation (A) que celle-ci s'écrit :

$$P_1(X,Y)c_1'(B-Y)^{1/2}+Q_1(X,Y) = 0$$

et que P_1 a la même expression que P trouvé précédemment : P_1 doit s'annuler.

Pour W, U_1, V_1 on trouve les mêmes expressions que précédemment avec $B_1' = 0$ ici.

P_1 est encore le polynôme en Y^4 trouvé précédemment et on ne peut trouver de valeurs des constantes pouvant annuler le coefficient du terme en Y^4 sauf les valeurs triviales trouvées plus haut.

Il n'y a donc pas dans ce cas aussi de solution du problème satisfaisant la condition nécessaire (C)

Si $B \equiv 0$ et $c_1' \equiv 0$, G se réduit à une constante et l'équation (A) à un polynôme du 6° degré en Y dont le terme de plus haut degré proviendra du second membre soit :

$$\left\{8B^2\left[-\frac{a_3}{2B}(X-B)+\frac{a_2}{2B}(X+B)\right]^2 F' + \frac{1}{2}\omega^2 B\right\} \times$$

$$\times \left\{-3XF'+BF'+F-2F''(X^2-B^2)-c_0\right\} \times k\left[-\frac{a_3}{2B}(X-B)+\frac{a_2}{2B}(X+B)\right]$$

k étant une constante.

Le premier crochet ne peut être nul car F serait en $\frac{1}{x}$ . . . le second crochet doit être nul. C'est le cas étudié pour B_1' et C_1' différents de zéro.

On a ici :

$$W = -4A$$

$$U_1 = 12A$$

$$V_1 = -12A$$

On aboutit à la même conclusion que ponr le cas où B_1' et C_1' sont différents de zéro.

Le problème n'a donc pas de solution pour le cas général :

$$a_3 \neq 0, \quad a_o \neq a_4$$

Pour le cas $a_3 \neq 0$, $a_o = a_4$ nous avons obtenu les expressions de $\Omega, \Delta\Omega, \phi$ en fonction de r et χ

Par la même méthode que pour $a_3 \neq 0$, $a_o \neq a_4$ on trouve qu'il n'y a pas de solution possible pour le problème cherché dans ce paragraphe.

Pour le cas proposé par Oort où $a_3 = 0$ $a_o = a_4$ la méthode est différente et il importe de l'exposer ici.

On a dans ce cas :

$$a = c = a_o$$

$$b = a_o + R^2 a_2$$

$$f = g = h = 0$$

$$\phi = C - 2\, a_o \Omega$$

$$\nu = 4\pi \cdot g\left(C - 2a_o\Omega - \frac{\omega^2 R^2}{4b}\right) \times \frac{1}{a_o(a_o + R^2 a_2)^{1/2}}$$

On écrit que p_ν = constante.

soit :

$$\rho(a_o + R^2 a^2)^{1/2} = mg\left(C - 2a_o\Omega - \frac{\omega^2 R^2}{4b}\right)$$

Dérivons les deux membres de cette équation par rapport à r puis par rapport à χ .Il est facile de voir que :

$$\phi'_{\chi} \frac{\partial}{\partial r}\left[\rho (a_o+R^2 a_2)^{1/2}\right] = \phi'_{r} \frac{\partial}{\partial \chi}\left[\rho\ (a_o+R^2 a_3)^{1/2}\right]$$

Contrairement au cas général on remplace $\phi'_{\chi} = \frac{\partial \phi'}{\partial \chi}$ et $\phi'_{r} = \frac{\partial \phi'}{\partial r}$ par leurs valeurs sans introduire d'expressions telles que U_2 ou V_2 et on écrit directement les dérivées de $\rho(a_o+R^2 a_2)^{1/2}$

On a :

$$\phi'_{\chi} = -\frac{2a_o}{b^2}\left[b^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \chi} - \frac{1}{4}\omega^2 r^2 \sin\chi \cos\chi\right]$$

et :

$$\phi'_{r} = -2\frac{a_o}{b^2}\left[b^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \chi} + \frac{1}{4}\omega^2 r\cos^2\chi\right]$$

On obtient l'équation suivante :

$$\left\{(a_o+a_2 r^2\cos^2\chi)\frac{\partial \rho}{\partial \chi} - a_2\, r^2 \cos\chi \sin\chi \cdot \rho\right\}\left\{b^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{4}\omega^2 r\cos^2\chi\right\}$$

$$= \left\{(a_o+a_2 r^2\cos^2\chi)\frac{\partial \rho}{\partial \chi} + a_2 r\cos^2\chi \cdot \rho\right\}\left\{b^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \chi} - \frac{1}{4}\omega^2 r^2 \cos\chi \sin\chi\right\} \quad (D)$$

Supposons que l'on puisse développer Ω en série sous la forme :

$$\Omega = \frac{M}{r} + S_c(\chi) r^{-c} + \varepsilon \quad \text{avec } c>1$$

On sait que :

$$\rho = -\left\{\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \chi^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial \chi} \operatorname{tg}\chi\right)\right]$$

Or :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = -Mr^{-2} - cS_c\, r^{-c-1} + \varepsilon'_r$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} = 2Mr^{-3} + c(c+1)S_c\, r^{-c-2} + \varepsilon''\, r^{\prime}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \chi} = S'_c\, r^{-c} + \varepsilon'_\chi$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \chi^2} = S''_c\, r^{-c} + \varepsilon''_{\chi^2}$$

D'où :

$$\rho = -\left\{S''_c - S'_c \operatorname{tg}\chi + c(c-1)S_c\right\} r^{-c-2} + \varepsilon_1$$

On a d'autre part :

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = +\left\{S''_c - S'_c \operatorname{tg}\chi + c(c-1)S_c\right\}(c+2)\, r^{-c-3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \chi} = -\, r^{-c-2}\left\{S'''_c - \frac{S'_c}{\cos^2\chi} - S''_c \operatorname{tg}\chi + c(c-1)S'_c\right\}$$

En remplaçant ρ, Ω et leurs dérivées partielles par leurs expressions dans (D) on voit que le terme de plus haut degré dans le premier membre est en r^{2-c} alors que dans le second membre il est en r^{1-c} ou r^{3-2c} suivant que $1-c > 3-2c$ ou $3-2c > 1-c$, c'est-à-dire $c > 2$ ou $c < 2$.

Que c soit supérieur ou inférieur à 2 c'est le premier membre qui contient le terme de plus haut degré en r. Le coefficient de r^{2-c} doit s'annuler. On a donc :

$$Ma_2\cos^4\chi\left[a_2\cos^2\chi\,\frac{\partial}{\partial\chi}\left\{S''_c - S'_c\operatorname{tg}\chi + c(c-1)S_c\right\}\right.$$
$$\left. - a_2\cos\chi\sin\chi\left\{S''_c - S'_c\operatorname{tg}\chi + c(c-1)S_c\right\}\right] = 0$$

En posant : $S''_c - S'_c \operatorname{tg}\chi + c(c-1)S_c = \mathcal{B}$

On a :

$$\cos\chi \frac{d\mathcal{B}}{d\chi} = \sin\chi\ \mathcal{B}$$

soit par intégration :

$$S''_c - S'_c \operatorname{tg}\chi + c(c-1)S_c = \frac{A'_1}{\cos\chi}$$

Mais pour $\chi = \frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire sur tous les points de l'axe galactique si on étudie la galaxie) la densité serait infinie.

On doit donc avoir $A'_1 = 0$

Soit donc k le premier nombre d'une suite croissante c,d,...k tel que :

$$S''_k - S'_k \operatorname{tg}\ + k(k-1)S_k \neq 0$$

La première approximation pour la densité sera donnée par :

$$\rho = -\left\{ S''_k - S'_k \operatorname{tg}\chi + k(k-1)S_k \right\} r^{-(k+2)}$$

On a d'autre part :

$$\Omega = Mr^{-1} + S_c r^{-c} + S_d\ r^{-d} + \ldots + S_k r^{-k} + \ldots$$

Posons $\mathcal{B}_1 = S''_k - S'_k \operatorname{tg}\chi + k(k-1)S_k$

On a : $\frac{\partial\rho}{\partial\chi} = -\mathcal{B}_1' r^{-k-2}$

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = +\mathcal{B}_1 (k+r)\ r^{-k-3}$$

Portons ces valeurs dans l'équation (D)

Le premier crochet du second membre est de l'ordre de r^{-k-1} et le second crochet de l'ordre de $-c+4$ ou r^2.

Le second membre est de l'ordre de $-k+1$ ou $-k+3-c$.

Le terme de plus haut degré du premier membre est :

$$-a_2\cos\chi\left[-\beta_1\sin\chi+\beta_1'\cos\chi\right)\left(-Ma_2^2\cos^4\chi\right) r^{-k+2}$$

Il est de degré supérieur aux termes du second membre. On doit donc avoir :

$$Ma_2^2\cos^4\chi\left[\cos^2\chi\,\frac{\partial}{\partial\chi}\,(S''_k-S'_k\,tg\chi+k(k-1)\,S_k)\right.$$

$$\left.-\cos\chi\sin\chi\,(S''_k-S'_k\,tg\chi+k(k-1)\,S_k)\right] = 0$$

Par intégration on a comme précédemment :

$$S''_k-S'_k\,tg\ +k(k-1)\,S_k = \frac{Az}{\cos\chi}$$

Par le même raisonnement on trouve que S_k doit satisfaire l'équation :

$$S''_k-S'_k\,tg\,\chi\ +k(k-1)\,S_k = 0$$

ce qui est contraire à l'hypothèse de la non nullité de cette équation faite plus haut.

Si on ne peut trouver un nombre k tel que :

$S''_k-S'_k\,tg\chi+k(k-1)\neq 0$ la densité est nulle partout.

Il n'y a donc pas de solution possible pour notre problème.

Même pour le cas très particulier où $a_2 = 0$ et pour lequel l'équation (D) se réduit à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \chi}\left\{a_o^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{4}\omega^2 r\cos^2\chi\right\} = \frac{\partial \rho}{\partial r}\left\{a_o^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \chi} - \frac{1}{4}\omega^2 r^2 \cos\chi \sin\chi\right\}$$

on ne trouve pas de solution physiquement valable. Ainsi il n'existe pas de systèmes constitués de particules de masses égales ayant une distribution éllipsoïdale des vitesses et qui sont à l'état stable seulement sous l'action des attractions gravitationnelles intérieures au système.

Nous allons ici récapituler les hypothèses faites dans notre étude sur l'existence possible d'un système à distribution ellipsoïdale et à l'état stable.

On suppose que :

1°) f est fonction du seul argument Q avec :

$$Q = \emptyset + pu+qv+rw+au^2+bv^2+cw^2+2fvw+2gwu+2huv$$

2°) Le système est fini en dimensions ($\Omega \sim \frac{M}{r}$ pour r grand)

3°) Le moyen mouvement n'est pas nul en tous points;

4°) Ω n'a pas une symétrie sphérique.

Toutes ces hypothèses sont physiquement raisonnables, sauf la première qui est la cause du résultat négatif qu'on trouve pour Ω et ν. Cette hypothèse sur la forme de la distribution des vitesses est une restriction non nécessaire pour déterminer les caractéristiques dynamiques de systèmes stellaires à l'état stable et ayant un ellipsoïde des vitesses avec trois axes inégaux.

On a montré dans l'exposé ci-dessus qu'elle ne convient pas comme base d'une dynamique de systèmes stellaires réels stationnaires.

Kuzmin élabore une nouvelle théorie et calcule Ω puis ρ sans utiliser f, puisqu'il suppose que f est une fonction quelconque des trois intégrales premières I_1 $I_2 I_3$, que nous définirons dans la deuxième partie, alors que Camm suppose $f = f(Q)$ où Q est une combinaison linéaire de I_1 I_2 I_3.

Notons cependant que Camm n'a pas restreint la fonction de distribution à avoir la forme exponentielle comme on l'a fait avant lui.

II - EXPOSE DE LA THEORIE DE KUZMIN

"MODELE DE LA GALAXIE RENDANT COMPTE DE LA DISTRIBUTION TRIAXIALE DES VITESSES" 1

Ainsi Kuzmin, dont nous allons exposer la théorie sur la structure de la galaxie, n'introduit pas cette restriction. Il part du fait observé que l'ellipsoïde des vitesses a trois axes inégaux et il l'explique en posant comme nécessaire l'existence d'une troisième intégrale première des mouvements stellaires, quadratique par rapport aux composantes des vitesses et indépendante de l'intégrale des forces vives:

$$I_3 = a_{20}\Pi^2 + a_{11}\Pi Z + a_{02}Z^2 + a_{10}\Pi + a_{01}Z + a_o$$

Il déduit une expression valable du potentiel gravitationnel, que l'on notera ici ϕ, puis celle de ρ par l'équation de Poisson.

Cette étude n'est pas indépendante de la notion de distribution des vitesses puisque d'après le théorème de Jeans $f=f(I_1 I_2 .. I_n)$ avec $n \leqslant 5$ pour un système stable.

Les I_n sont les intégrales premières des équations du mouvement dans l'espace des phases. Notons que les trois premières seulement I_1, I_2, I_3 et qui sont l'intégrale des aires, l'intégrale des forces vives et la troisième intégrale introduite plus haut, peuvent être utilisées comme argument de f.

En écrivant que I_3 est constant le long des orbites des étoiles, que $\frac{dI_3}{dt} = 0$ et en supposant $\frac{\partial I_3}{\partial \Theta}$ nulle, on obtient :

$$I_3 = (RZ - z\dot{R})^2 + z^2\dot{\theta}^2 + z_o^2(Z^2 - 2\phi^x)$$

où z_o est un paramètre que l'on suppose constant pour toute la galaxie, et ϕ une fonction reliée au potentiel par les équations

$$(I) \quad \begin{cases} z_o^2 \dfrac{\partial \phi^x}{\partial R} = z^2 \dfrac{\partial \phi}{\partial R} - Rz \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \\ z_o^2 \dfrac{\partial \phi^x}{\partial z} = (R^2 + z_o^2) \dfrac{\partial \phi}{\partial z} - Rz \dfrac{\partial \phi}{\partial R} \end{cases}$$

La condition d'existence de la troisième intégrale I_3 est la condition d'intégrabilité des équations (I) qui s'écrit :

$$3\left(z\frac{\partial \phi}{\partial R} - R\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) - (R^2 + z_o^2 - z^2)\frac{\partial^2 \phi}{\partial R \partial z} + Rz\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right) = 0$$

Il est plus commode pour le calcul de ϕ de travailler dans un système de coordonnées elliptiques X_1, X_2.

Dans le plan R,z on passe des coordonnées R et z aux variables homofocales X_1 et X_2 par les formules suivantes :

$$\begin{cases} R = z_o \sqrt{X_1^2 - 1}\sqrt{1 - X_2^2} \\ z = z_o X_1 X_2 \end{cases}$$

avec $|X_1| > 1$

$|X_2| < 1$

Par tout point M, passent deux coniques de même foyers $\pm z_o$ situés sur Oz :

l'ellipse d'équation

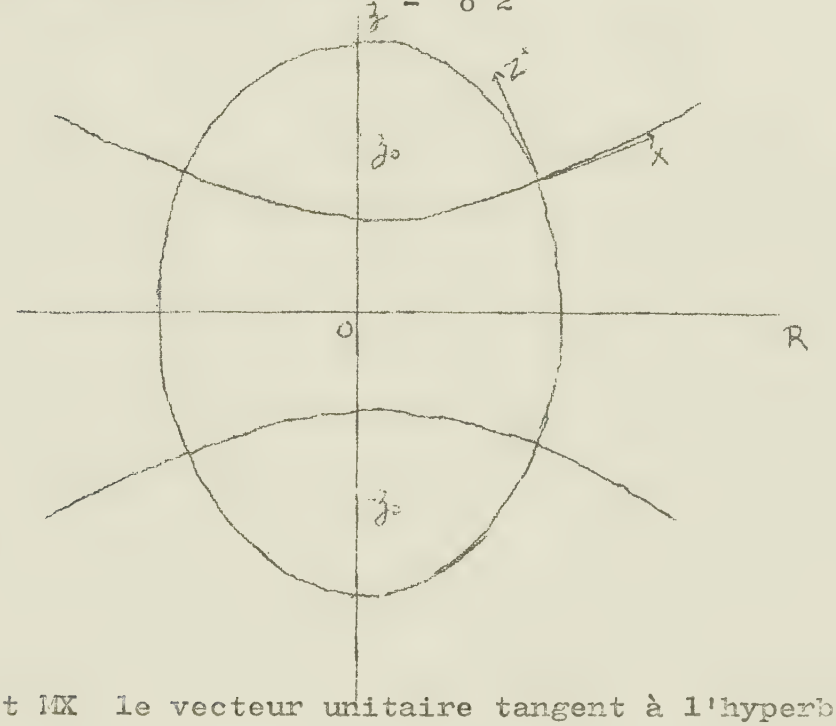
$$\frac{z^2}{z_o^2 X_1^2} + \frac{R^2}{z_o^2(X_1^2 - 1)} = 1 \qquad (X_1 = \text{constante})$$

qui coupe Oz aux points $\pm z_o X_1$

l'hyperbole d'équation

$$\frac{z^2}{z_o^2 X_2^2} - \frac{R^2}{z_o^2(1-X_2^2)} = 1 \quad (X_2 = \text{constante})$$

qui coupe Oz aux points $\pm z_o X_2$



soit MX le vecteur unitaire tangent à l'hyperbole

et $MZ^{\wedge}$ le vecteur unitaire tangent à l'ellipse.

A tout point M on attache ainsi un trièdre mobile $M(X,Y,Z)$ (le troisième axe est l'axe perpendiculaire au plan méridien sur lequel on mesure la vitesse tangentielle v_θ).

On a ainsi pour le vecteur vitesse $\vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt}$ les composantes $\frac{dR}{dt}$, v_θ $(=\dot{\theta})$, $\frac{dz}{dt}$ sur R,Y,z et v_1, v_θ, v_2 sur X,Y,Z et on passe de $\frac{dR}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ à v_1, v_2 par les formules de changement de coordonnées :

$$\frac{dR}{dt} = v_1 \cos\alpha - v_2 \sin\alpha$$

$$\frac{dz}{dt} = v_1 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha$$

où $tg2\alpha = \frac{2Rz}{R^2+z_o^2-z^2}$

La troisième intégrale prend la forme :

$$I_3 = X_2^2 v_1^2 + X_1^2 v_2^2 + X_1^2 X_2^2 v_\theta^2 - 2\phi^*$$

Les cas $zo \to o$ et $zo \to \infty$ sont deux cas limites.

a) Pour $zo \to o$ cette intégrale se réduit à la somme des carrés de deux intégrales des aires et ϕ a une symétrie sphérique;

b) Pour $zo \to \infty$ le système homofocal se réduit au système cartésien (les ellipses donnent les droites R = Ro et les hyperboles les droites z = zo)

La troisième intégrale se réduit à l'intégrale :

$$(\frac{dz}{dt})^2 = 2\phi(z) + h$$

la restriction imposée au potentiel étant :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial R \partial z} = 0 \text{ soit } \phi(R,z) = \phi_1(R) + \phi_2(z)$$

C'est l'hypothèse de Lindblad qu'il suppose valable localement c'est-à-dire à la périphérie du système galactique seulement.

Dans le cas général on peut se demander si l'existence de I_3, destinée à rendre compte des trois axes inégaux de E, doit être une hypothèse "locale" ou "globale".

Kuzmin a hésité entre ces deux pistes.

Dans son travail exposé ici il choisit l'hypothèse "globale" pour laquelle on va étudier le potentiel.

1°) Calcul du potentiel ϕ et de la densité ρ dans le cas général

Les dérivées partielles par rapport à R et à z en fonction de X_1, X_2 et des dérivées partielles par rapport à X_1 et X_2 sont données par les formules symboliques suivantes :

$$z_o^2 \frac{\partial}{\partial R} = \frac{X_1^2}{X_1^2 - X_2^2} \frac{1}{X_1} \frac{\partial}{\partial X_1} - \frac{X_2^2}{X_1^2 - X_2^2} \frac{1}{X_2} \frac{\partial}{\partial X_2}$$

$$\frac{z_o^2}{z} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{X_1^2 - 1}{X_1^2 - X_2^2} \frac{1}{X_1} \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1 - X_2^2}{X_1^2 - X_2^2} \frac{1}{X_2} \frac{\partial}{\partial X_2}$$

Les équations (I) s'écrivent dans le nouveau système de coordonnées :

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial X_1} = X_2^2 \frac{\partial \phi}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial X_2} = X_1^2 \frac{\partial \phi}{\partial X_2}$$

La condition d'intégrabilité de ces équations devient :

$$\frac{\partial}{\partial X_2} \left(X_2^2 \frac{\partial \phi}{\partial X_1} \right) = \frac{\partial}{\partial X_1} \left(X_1^2 \frac{\partial \phi}{\partial X_2} \right)$$

ou encore :

$$\frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} \left[(X_1^2 - X_2^2) \phi \right] = 0$$

On a donc $(X_1^2 - X_2^2)\,\phi = f_1(X_2) - f_2(X_2)$

ou $$\phi = \frac{f_1(X_1) - f_2(X_2)}{X_1^2 - X_2^2}$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions arbitraires des variables X_1 et X_2 respectivement.

Calculons ϕ^χ

$$\phi^\chi = X_2^2\phi + H(X_2)$$

$$\text{et } 2X_2\,\phi + X_2^2\frac{\partial\phi}{\partial X_2} + H' = X_1^2\frac{\partial\phi}{\partial X_2}$$

$$H' = (X_1^2 - X_2^2)\frac{\partial\phi}{\partial X_2} - 2X_2\,\phi$$

$$H' = (X_1^2 - X_2^2)\left[2X_2\frac{\phi}{X_1^2 - X_2^2} - \frac{f'_2}{X_1^2 - X_2^2}\right] - 2X_2\,\phi$$

$$H' = -f'_2$$

$$H = -f_2$$

D'où :

$$\phi^\chi = X_2^2\frac{f_1 - f_2}{X_1^2 - X_2^2} - f_2$$

ou :

$$\phi^\chi = \frac{X_2^2 f_1(X_1) - X_1^2 f_2(X_2)}{X_1^2 - X_2^2}$$

La formule de Poisson permet de calculer la densité ρ:

$$\Delta\phi = \frac{1}{H_1 H_2 H_\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial X_1}\left(H_\Theta\,\frac{H_2}{H_1}\,\frac{\partial\phi}{\partial X_1}\right) + \frac{\partial}{\partial X_2}\left(H_\Theta\,\frac{H_1}{H_2}\,\frac{\partial\phi}{\partial X_2}\right)\right]$$

avec :

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial X_1}\right)^2 = z_o^2 \frac{X_1^2 - X_2^2}{X_1^2 - 1}$$

$$H_2^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial X_2}\right)^2 = z_o^2 \frac{X_1^2 - X_2^2}{1 - X_2^2}$$

$$H_\Theta^2 = \left(\frac{\partial R\Theta}{\partial \Theta}\right)^2 = z_o^2 (X_1^2 - 1)(1 - X_2^2)$$

$$4\pi z_o^2 G\rho = 2\,\frac{(f_1 - f_2 - X_1 f'_1 + X_2 f'_2)(2 - X_1^2 - X_2^2)}{(X_1^2 - X_2^2)^3}$$

$$- \frac{(X_1^2 - 1) f_1'' - (1 - X_2^2) f_2''}{(X_1^2 - X_2^2)^2}$$

G est la constante de gravitation

Introduisons la fonction $\psi(z) = 4\pi G z_o^2 \rho(R = 0)$

$\rho(R = 0)$ est la densité le long de Oz

$R = 0$ si $X_1 = 1$ et $X_2 = z$ avec $|z| < 1$

ou si $X_2 = 1$ et $X_1 = z$ avec $|z| > 1$

$\rho(z)$ [avec $|z| < 1$] $= \psi(X_2)$

$\rho(z)$ [avec $|z| > 1$] $= \psi(X_1)$

Comme ρ est supposé continu c'est la même fonction $\psi(z)$.

Relation entre $f_1(X_1)$ et $\psi(z)$ $(R=0 \quad |z| > 1)$

$$\psi = \frac{2(f_1 - f_2 + X_2 f_2)(1 - X_2^2)}{(1 - X_2^2)^3} + \frac{(1 - X_2^2) f''_2}{(1 - X_2^2)^2}$$

$$\Psi = \frac{2(f_1 - f'_1 - f_2 + X_2 f'_2)}{(1-X_2^2)^2} + \frac{f''_2}{1-X_2^2}$$

$$\Psi = \frac{2(f_2 - X_2 f'_2) - f''_2(X_2^2-1)}{(X_2^2-1)^2} + \frac{C'_1}{(X_2^2-1)^2}$$

C'_1 étant une constante égale ici à $f_1(1) - f'_1(1)$

Relation entre $f_2(X_2)$ et $\Psi(z)$ (R=0 $|z| < 1$)

$$\Psi = \frac{2(f_1 - f_2 + f'_2 - X_1 f'_1)(1-X_1^2)}{(X_1^2-1)^3} - \frac{X_1^2 - 1}{(X_1^2-1)^2} f''_1$$

$$\Psi = \frac{2(f_1 - X_1 f'_1) - f''_1(X_1^2-1)}{(X_1^2-1)^2} + \frac{C'_2}{(X_1^2-1)^2}$$

avec $C'_2 = f_2(1) - f'_2(1)$

$\phi(R,z)$ étant continu aux foyers ($\pm zo$) on a :

$$f_1(1) = f_2(1)$$

$$f'_1(1) = f'_2(1)$$

et par conséquent $c'_1 = c'_2$

D'autre part les relations entre f_1 et Ψ, et f_2 et Ψ ont la même forme.

$f_1(X_1)$ et $f_2(X_2)$ sont donc définies par la même fonction $f(z)$ où on a :

$$z = X_1 \text{ si } |z| > 1 \quad \text{et} \quad z = X_2 \text{ si } |z| < 1$$

On peut donc écrire :

$$\psi = \frac{-2(f-Xf')-(X^2-1)f''}{(X^2-1)^2} + \frac{c}{(X^2-1)^2}$$

c étant une constante arbitraire et $X \neq 1$

ou encore :

$$(X^2-1)^2\psi + (X^2-1)\, f'' + 2(f-Xf') = c$$

Cette relation peut s'écrire :

$$(X^2-1)\psi + \frac{2(f-Xf')}{X^2-1} + f'' = \frac{c}{X^2-1} \quad (a)_1$$

Cherchons la dérivée du terme $\frac{c-2(f-Xf')}{X^2-1}$

Elle est égale à :

$$-2X\,\frac{c-2(f-Xf')}{(X^2-1)^2} + \frac{2Xf''}{X^2-1}$$

ou encore :

$$-2X\,\frac{c-2(f-Xf')-(X^2-1)f''}{(X^2-1)^2}$$

soit enfin : $-2X\psi$

On peut donc écrire d'après l'équation $(a)_1$:

$$(X^2-1) + f'' + 2\int_0^X \psi X\,dX = K \quad (a)'_1$$

On tire de cette équation $f'' = K-(X^2-1)\psi - 2\int_0^K \psi X\,dX \quad (b)_1$

Considérons l'équation :

$$f = X\int_0^X (1+X^2)\psi dX-(1+X^2)\int_0^X \psi X dX+c_1X^2+c_2 \qquad (c)_1$$

Elle bien vérifiée car en la dérivant deux fois on obtient l'équation $(b)_1$ si $K = 2c_1$

L'équation $(c)_1$ donne en effet par dérivation :

$$f' = \int_0^X (1+X^2)\psi dX - 2X\int_0^X \psi X dX+2c_1X \qquad (d)_1$$

En dérivant cette dernière équation on a :

$$f'' = 2c_1+(1-X^2)\psi -2\int_0^X \psi X dX \text{ qui est bien l'équation } (b)_1$$

Les équations $(c)_1$ $(a)_1$ et $(d)_1$ donnent les valeurs de f, f' et f'' en fonction de ψ

Portons ces valeurs dans l'expression de ρ ; on obtient

$$4\pi G z_o^2\rho = 2\frac{2X_1^2-X_2^2}{(X_1^2-X_2^2)^3}\left[(X_1^2-1)\int_0^{X_1}\psi X\,dX+(1-X_2^2)\int_0^{X_2}\psi X dX-\frac{K}{2}(X_1^2-X_2^2)\right]+$$

$$+\frac{1}{(X_1^2-X_2^2)^2}\left\{-(X_1^2-1)\left[K-(X_1^2-1)\psi_1-2\int_0^{X_1} X\psi dX\right]+\right.$$

$$\left.+(1-X_2^2)\left[K-(X_2^2-1)\psi_2-2\int_0^{X_2}\psi X dX\right]\right\} \qquad (e)_1$$

Posons : $$g_1 = \frac{X_1^2-1}{X_1^2-X_2^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1-X_2^2}{X_1^2-X_2^2}$$

Les termes en K s'annulent dans $(e)_1$

Les termes en ψ donnent :

$$\varepsilon_1^2 \psi_1 + \varepsilon_2^2 \psi_2$$

Il reste les termes en $\int_o^X \psi X dX$ qui donnent :

$$\frac{1}{(X_1^2-X_2^2)^3} \times 2 \left\{ \int_o^{X_1} \psi X dX \quad (2-X_1^2-X_2^2)(X_1^2-1)+(X_1^2-X_2^2)(X_1^2-1) \right]$$

$$+ \int_o^{X_2} \psi X dX \left[(2-X_1^2-X_2^2)(1-X_2^2)-(1-X_2^2)(X_1^2-X_2^2) \right]$$

ou encore :

$$\frac{4}{(X_1^2-X_2^2)^3} (X_1^2-1)(1-X_2^2) \left[\int_o^{X_1} \psi X dX - \int_o^{X_2} \psi X dX \right.$$

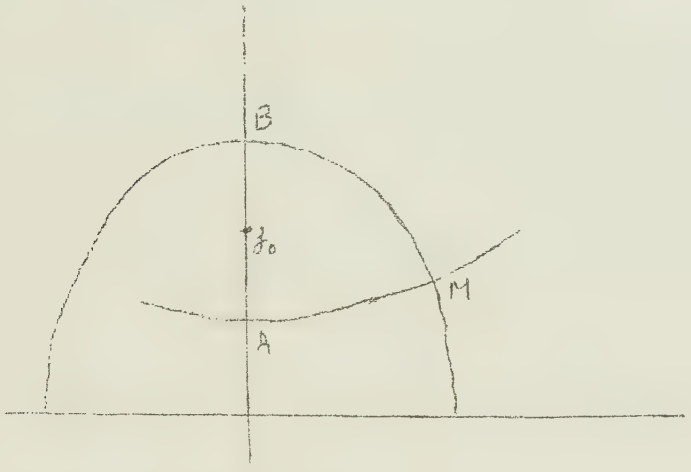
En posant : $\psi_{12} = \frac{2\int_{X_1}^{X_2} \psi X dX}{X_1^2-X_2^2}$

on obtient pour ρ

$$4\pi G z_o^2 \rho = \varepsilon_1^2 \psi_1 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \psi_{12} + \varepsilon_2^2 \psi_2$$

Cette équation montre que $\rho \geq 0 \; \forall R, z$ si on choisit une fonction f telle que $\psi \geq 0$, paire et décroissante.

Ces hypothèses sur ψ entraînent en effet



$$\rho(A) > \rho(M) > \rho(B)$$

avec :

$M\ (X_1, X_2)$

$A\ (R=0, z = X_2)$

$B\ (R=0, z = X_1)$

La masse totale du système s'exprime par la formule :

$$\frac{GM}{z_0} = \int_c^{\infty} (1+X^2)\psi\, dX$$

Elle est finie si ψ décroit plus vite que $\frac{1}{X^3}$

Nous avons ainsi obtenu les expressions générales de ϕ et ρ Cependant la galaxie étant aplatie on peut obtenir des renseignements approximatifs sur ses caractéristiques dynamiques et sa structure en étudiant séparément la projection du mouvement des étoiles sur le plan galactiques et sa composante perpendiculaire à ce plan. Ceci nous amène à étudier le potentiel et la densité dans le cas particulier des systèmes stellaires plats avant de chercher des

modèles concrets pour la galaxie.

2°) Systèmes stellaires plats :

Pour de tels systèmes le rapport ε des axes des surfaces d'égale densité dans la direction z et R est tel que :

$$\varepsilon^2 \ll 1$$

Pour les petites valeurs de X on a :

$$X_1 = \left(1+ \frac{R^2}{z_o^2}\right)^{1/2}$$

$$X_2 = \frac{z}{z_o} X_1^{-1}$$

La densité est représentée par :

$$4 \pi G z_o^2 \rho = \psi(X_2) X_1^{-4}$$

et le potentiel par :

$$\phi = \frac{G M}{z_o(|X_1| + |X_2|)}$$

Pour z = 0 on a alors :

$$\phi_o = \frac{GM}{z_o} \left(1+ \frac{R^2}{z_o^2}\right)^{-1/2}$$

Pour compléter l'étude des systèmes plats, cherchons ce qui l'on obtient dans la direction z. si fdzdZ est le nombre d'étoiles

contenues dans dz et ayant une vitesse comprise entre Z et Z+dZ. on a :

$$Z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial Z} = 0$$

La solution de cette équation a la forme suivante :

$$f = f(Z^2 - 2\phi, R)$$

On a ainsi calculé la forme de la fonction de distribution des composantes des vitesses perpendiculaires au plan galactique.

On tire la densité par l'équation integrale

$$\rho = \int_{-}^{+} f(Z^2 - 2\phi, R)\, dZ$$

Le potentiel est alors donné par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -4\pi G \int_{o}^{z} \rho\, dz$$

3°) Modèles concrets pour la galaxie :

La fonction f du premier paragraphe qui est égale à f_1 pour $X > 1$ et à f_2 pour $X < 1$ est arbitraire.

Pour avoir un modèle concret de la galaxie il est nécessaire de choisir l'expression de cette fonction.

La formule suivante a été adoptée pour un tel choix

$$f'' = \frac{k}{nX_o} \left(\frac{X_o}{\zeta}\right)^n$$

ou $k > o$, n, X_o sont des constantes.

$\mathcal{Y}$ est donné par :

$$\mathcal{Y}^2 = \frac{X^2+X_o^2}{1+X_o^2}$$

On tire :

$$f = \frac{k}{nX_o}\left[X_o^2 \left(\frac{\mathcal{Y}_o}{\mathcal{Y}}\right)^{n-2} + X \int_o^X \left(\frac{\mathcal{Y}_o}{\mathcal{Y}}\right)^n d X \right] + \text{constante}$$

$$\text{avec } \mathcal{Y}_o = \mathcal{Y}(X=0)$$

puis :

$$\Psi = \frac{2k\,\mathcal{Y}_o^{n+2}}{n(n-2)X_o^3}\left[1 - \frac{1+\frac{n}{2}(\mathcal{Y}^2-1)}{\mathcal{Y}^n}\right]\frac{1}{(\mathcal{Y}^2-1)^2}$$

si $n>1$ la masse totale est finie. Elle a pour expression :

$\frac{GM}{z_o} = \frac{k}{2n} B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ou B est la fonction Beta égale à

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}$$

Le modèle le plus intéressant est celui pour lequel n = 3.

On a dans ce cas :

$$f = \frac{GM}{z_o}\,\frac{X_o}{\mathcal{Y}_o}\,\mathcal{Y}$$

d'où l'on tire :

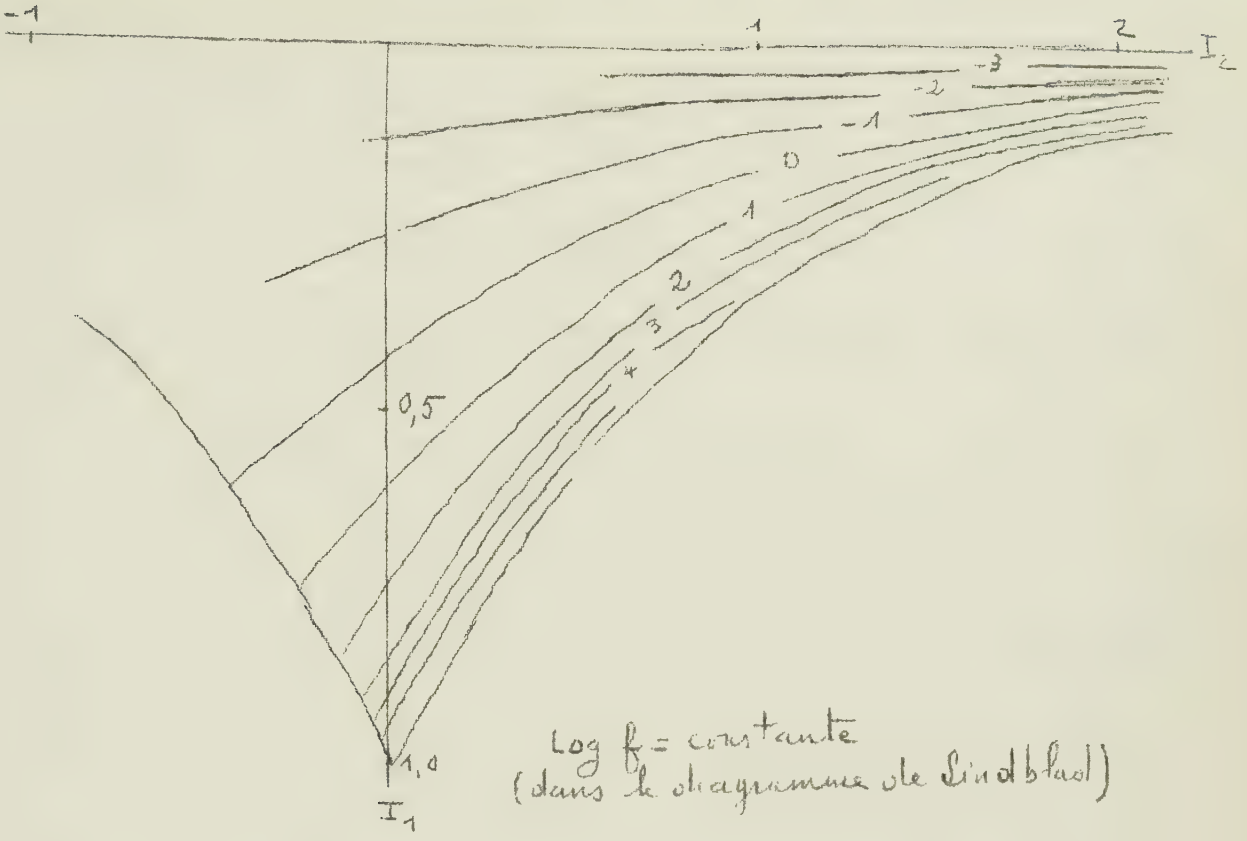
$$\rho = \frac{GM}{z_o X_o}\,\frac{\mathcal{Y}_o}{\mathcal{Y}_1+\mathcal{Y}_2}$$

et

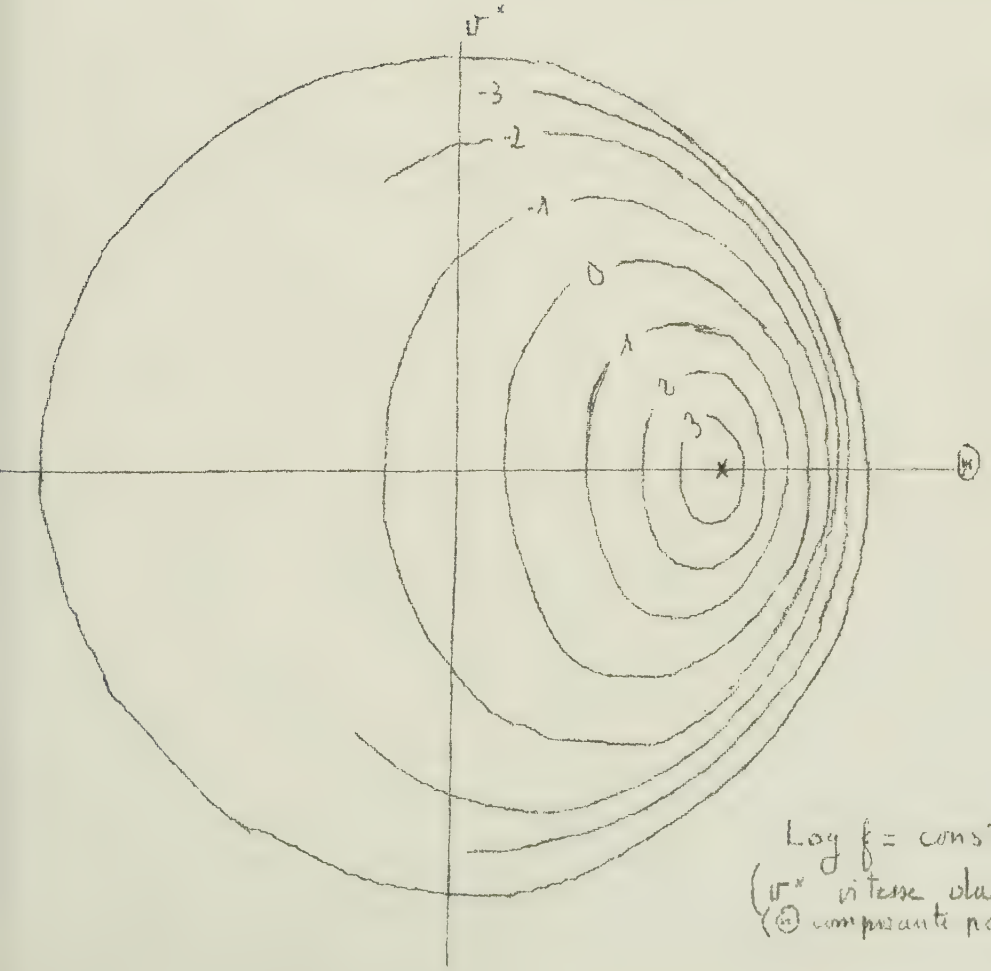
$$\rho = \frac{M\mathcal{Y}_o^2}{4\pi z_o^3 X_o^3}\left[\frac{\mathcal{Y}_o}{\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2(\mathcal{Y}_1+\mathcal{Y}_2)}\right]^3\left[\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2+\mathcal{Y}_1^2\mathcal{Y}_2^2+(\mathcal{Y}_1+\mathcal{Y}_2)^2\right]$$

Kuzmin suppose alors f fonction de I_1 et I_2 seulement pour pouvoir résoudre l'équation intégrale $\rho = \frac{2\pi}{R} f(I_1,I_2)\, dI_1\, dI_2$

d'où il tire la fonction de f



Log f = constante
(dans le diagramme de Lindblad)



Log f = constante
(v^* vitesse dans le plan méridien)
(M composante perpendiculaire à ce plan)

Choix de f

Pour n = 3 Kuzmin a choisi la fonction f suivante pour l'étude de la galaxie :

$$f = \phi^{o}\, z_o \sqrt{x_o^2 + X^2}$$

où ϕ^{o} z_o x_o sont des constantes que l'on détermine par l'observation :

$$\sqrt{\phi^{o}} = 425 \text{ Km/s}$$

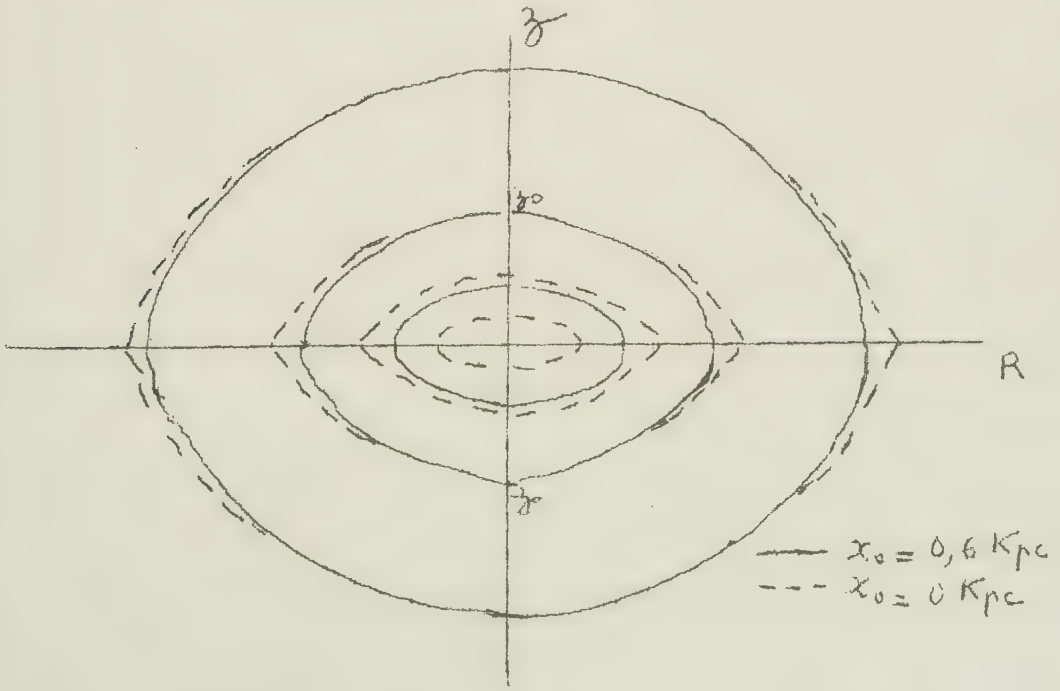
$$z_o = 3{,}6 \text{ Kpc}$$

$$x_o = 0{,}6 \text{ Kpc}$$

Si on suppose en première approximation xo = 0 on a pour ϕ dans le plan galactique

$$\phi = \phi^{o} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z_o^2}}}$$

Dans ce cas les surfaces équipotentielles ont la forme suivante (en section méridienne)



La densité près du plan galactique est donnée par :

$$4\pi G\rho = \frac{\phi^{o}}{z_o x_o} \quad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z_o^2}\left(1+\frac{R^2}{z_o^2}+\frac{z^2}{x_o^2}\right)^{3/2}}}$$

Le rapport des axes des surfaces d'égale densité est au centre de la galaxie $\frac{2x_o}{\sqrt{3}\,z_o} \simeq \frac{1}{5}$

III - ESSAI DE COMPARAISON ET DE CRITIQUE DES DEUX THEORIES

A) THEORIE DE CAMM

Dans l'étude de l'exposé de Camm on cherche s'il existe des systèmes stellaires à l'état stable dont l'état de mouvement est décrit par la fonction de distribution ellipsoïdale des vitesses

$$f \equiv f(\emptyset+pu+qv+rw+au^2+bv^2+cw^2+2fvw+2gwu+2huv)$$

ou encore si cette fonction f représente une solution de l'équation de continuité à 6 dimensions

On suppose que l'on étudie un système fini en dimensions sur lequel n'agissent pas d'autres systèmes voisins et soumis aux deux restrictions suivantes.

Le moyen mouvement n'est pas nul en tous les points.

Le potentiel gravitationnel Ω n'a pas une symétrie sphérique.

On montre alors que la symétrie est de rotation pour Ω et f. On calcule Ω qui ne dépend plus que de deux variables.

On déduit la densité de masse ρ par l'équation de Poisson et la densité de particules par intégration de f dans l'espace des vitesses.

On restreint le problème au cas où les seules forces agissant sur le système sont les attractions gravitationnelles des particules c'est-à-dire que l'on considère des systèmes réels comme la Voie Lactée et on conclue que la fonction de répartition ellipsoïdale est

impossible du point de vue dynamique dans de tels systèmes.

Nous allons donner une vue d'ensemble sur la façon dont se présente le problème dans les quatre cas où les constantes d'intégration des coefficients de E prennent des valeurs particulières c'est-à-dire montrer, en simplifiant et en complétant la méthode de Camm éventuellement, que dans aucun de ces cas les potentiels et les fonctions de densité qui dépendent de la répartition des vitesse ne satisfont l'équation de Poisson pour les systèmes stellaires autonomes et de masse finie étudiés.

Cas (1) - $a_3 = 0$; $a_o = a_4$ (Cas de Oort)

$a = a_o$; $b = a_o + a_2 R^2$; $c = a_6$; $g = 0$; $f = h = 0$

$Q = a_o I_1 + \omega I_2 + a_2 I_2^2$ | I_1 intégrale des forces vives ; I_2 intégrale des aires

$$\nu = \frac{1}{a_o(a_o+a_2R_2^2)^{1/2}}\, g_1\left[C - 2a_o\Omega - \frac{\omega^2 R^2}{4(a_o+a_2R^2)} \right]$$

où g_1 est une fonction arbitraire.

Le potentiel n'est soumis à aucune restriction mais E est à deux axes égaux.

L'équation de Poisson ne possède aucune solution pour le potentiel telle que :

$$\Omega = Mr^{-1} + S_c(\ )r^{-c} +$$

Par contre elle a des solutions pour des systèmes infinis.

Cas (2) - $a_3 = 0$; $a_o \neq a_4$ (Cas de Lindblad)

$\Omega = F(R) + G(z)$

Le corps des vitesses est un ellipsoïde à trois axes (potentiel particulier) :

$$a = a_o \; ; \quad b = a_o + a_2 R^2 \; ; \quad c = a_4 \; ; \quad g = 0 \; ; \quad f = h = 0$$

$$Q = a_o I_1 + \omega I_2 + (a_4 - a_o) I_3 + a_2 I_2^2$$

où $I_3 = Z^2 - 2G(z)$ + constante

$$\sqrt{} = \frac{1}{a_o^{1/2} a_4^{1/2} (a_o + a_2 R^2)^{1/2}} \; g_2 \left[-2 \left(a_o F(R) + a_4 G(z) \right) - \frac{\omega^2 R^2}{a_o + a_2 R^2} \right]$$

Cherchons les solutions possibles de l'équation de Poisson :

$$F''(R) + \frac{F'(R)}{R} + G''(z) = \frac{1}{a_o^{1/2} a_4^{1/2} (a_o + a_2 R^2)^{1/2}} \; f^{*} \left[2a_o F + 2a_4 G + \frac{\omega^2 R^2}{4(a_o + a_2 R^2)} \right.$$

f^{*} est une fonction arbitraire.

En posant : $F'' + \frac{F'}{R} = T_1(R)$

$$\left[a_o a_4 (a_o + a_2 R^2) \right]^{1/2} = T_2(R)$$

$$2a_o F + \frac{\omega^2 R^2}{4(a_o + a_2 R^2)} = T_3(R)$$

On obtient après élimination de $f^{*'}$ par dérivation de l'équation de Poisson par rapport à R et z:

$$2 a_4 G' \left[(T_1 T_2)' + G'' T'_2 \right] - G''' T_2 T_3' = 0 \qquad (1)$$

Les variables se séparent si :

a) $T_2' = 0$ ou T_2 = constante $(\rightarrow a_2 = 0)$

L'équation (1) devient :

$$2 a_4 \frac{G'}{G} = \frac{T_3'}{T_1'} = \text{constante}$$

F et G sont définies par les équations :

$$2\,a_4 G - A_o G'' = B_o$$

$$T_3 - A_o\, T_1 = C_o$$

ou A_o, B_o, C_o sont des constantes.

b) $G'' =$ constante $= E_o$

$$G'\left[(T_1T_2)' + E_oT_2'\right] = 0$$

G = constante est solution.

La deuxième possibilité est $T_2(T_1+E_o) = F_o$

où F_o = est une constante.

f^x doit alors être une constante. On a $\sqrt{} = \dfrac{\text{constante}}{(a_o+a_2R^2)^{1/2}}$

et F(R) est donné par l'équation :

$$F''(R) + \frac{F'(R)}{R} + E_o = \sqrt{}$$

c) $(T_1T_2)' = 0$

On a dans ce cas :

$$2a_4 \frac{G'G''}{G'''} = \frac{T_2T_3'}{T_2'}$$

F(R) doit ainsi satisfaire les équations :

$$T_1T_2 = f_o\ ,\ T_2T_3' - 1_oT_2' = 0 \qquad (\alpha)$$

et G(z) à l'équation :

$$2a_4G'G'' - 1_oG''' = 0$$

Les deux équations (α) ne peuvent être résolues toutes deux ensemble que pour $a_o = \omega = 0$

Il en résulte F(R) = constante.

Toutes ces possibilités n'ont aucune signification pour des systèmes stellaires réels.

Cas $(3)_1$ - $a_3 \neq 0$, $a_o = a_4$

$$\Omega = \frac{F(r)-G(\chi)}{r^2} \; ; \quad \phi = 2\,\frac{(a_o+a_3r^2)G(\chi)-a_oF(r)}{r^2}$$

$$a = a_o+a_3z^2 \qquad b = a_o+a_3z^2+a_2R^2$$

$$c = a_o+a_3R^2$$

$$g = -a_3Rz \qquad f = g = 0$$

L'ellipsoïde des vitesses a trois axes inégaux (potentiel particulier)

$$\nu = \frac{1}{b^{1/2}(ac-d^2)^{1/2}}\, g_3 \left[2\phi - \omega^2\, \frac{r^2\cos^2\theta}{4b} \right]$$

avec $b = a_o+a_3r^2\sin^2\theta+a_2r^2\cos^2\theta$

$$ac - d^2 = a_o(a_o+a_3r^2)$$

Il n'y a pas de séparation possible des variables dans l'équation de Poisson.

On a une solution pour $G(\chi) \equiv$ constante.

Seules sont valables des répartitions infinies à symétrie sphérique.

Cas $(3)_2$ - $a_3 \neq 0$, $a_o \neq a_4$

$$\Omega = \frac{F(X)-G(Y)}{X-Y} \; ; \quad \phi = 2\,\frac{a_3(XG-YF)-C(F-G)}{X-Y}$$

$a = a_o + z^2 a_3$; $b = a_o + z^2 a_3 + R^2 a_2$; $c = a_4 + R^2 a_3$

$g = -Rz a_3$; $f = h = 0$

E a trois axes inégaux (potentiel particulier)

$$\nu = \frac{4\pi}{\Delta^{1/2}} \; g\,(\phi^x)$$

$$\text{ou } g(p^2) = \int_{q=0}^{\infty} f(p^2+q^2)q^2 dq$$

$$\phi^x = \phi - \frac{\omega^2 R^2}{4b}$$

La séparation des variables n'est pas possible.

Dans la première partie on arrive donc à la conclusion que l'existence d'une distribution ellipsoïdale des vitesses dans un système autonome suppose que la masse est infinie et la théorie ellipsoïdale proposée par Camm ne convient pas pour des systèmes stellaires réels

Dans la deuxième partie Kuzmin introduit la troisième intégrale I_3 dans l'argument de f et déduit le potentiel ϕ et la densité ρ à partir de l'étude de I_3.

L'origine de cette intégrale est le problème mathématique suivant (Whittaker Analytical Dynamics, page 331).

Comment faut-il choisir le potentiel V(x,y) pour que les équations du mouvement admettent, outre l'intégrale des forces vives, l'intégrale :

$$Q' = P\dot{x}^2+Q\dot{x}\dot{y}+R\dot{y}^2+S\dot{y}+T\dot{x}+K = \text{constante}$$

où P,Q,R,S,T,K sont des fonctions de x,y.

Il y a deux solutions :

a) $V(x,y)=V(r)$ où $r = \sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}$

La force est radiale avec comme centre le point de coordonnées p et q (p;q constantes arbitraires).

L'intégrale Q est alors linéaire, elle se réduit à l'intégrale des aires si p = q = 0, on a :

$$x\dot{y} - y\dot{x} = C$$

b) Par un changement des axes de coordonnées on trouve à la fois Q' et une équation aux dérivées partielles pour V(x,y) à savoir :

$$Q' = \frac{1}{2}(x\dot{y}^2 - y\dot{x}^2)+ a\dot{x}^2+b\dot{y}^2+K$$

où a,b,K sont des constantes.

V vérifie l'équation (E) :

$$(E)\quad xy\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + (y^2 - x^2 + c^2)\,\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

$$+ 3y\,\frac{\partial V}{\partial x} - 3x\,\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

où $c^2 = 2(a-b)$

Cette équation (E) est une équation linéaire classique; elle a été intégrée par Darboux, si on utilise les coordonnées homofocales

$$x = c\,u\,v$$
$$y = c\sqrt{u^2-1}\ \sqrt{1-v^2}$$

On a alors : $V = \dfrac{f(u)-g(v)}{u^2 - v^2}$

où f(u) et g(v) sont deux fonctions arbitraires.

On a alors $T = \dfrac{c^2}{2}\,(u^2-v^2)\left[\dfrac{\dot{u}^2}{u^2-1} + \dfrac{\dot{v}^2}{1-v^2}\right]$

$$U = -V = \frac{g(v)-f(u)}{u^2 - v^2}$$

et le système mécanique est du type de Liouville donc intégrable par quadratures.

L'équation (E) trouvée plus haut est la base de l'étude de Camm (1ère partie, § 5) où on a trouvé 4 cas mathématiques possibles pour le potentiel et de celle de Kuzmin (2ème partie).

Kuzmin étend ces résultats au cas du problème à trois dimensions mouvement du point $M(R, \theta, z)$ sous l'action du potentiel $\phi\,(R,z)$ où R, θ, z sont les coordonnées cylindriques, l'axe Oz coïncidant avec l'axe du système galactique.

Kuzmin utilise dans son travail les coordonnées homofocales :

$$R = zo \sqrt{X_1^2 - 1} \sqrt{1-X_2^2}$$

$$z = zo \; X_1 X_2$$

avec $|X_1| > 1$

$|X_2| < 1$

les vitesses correspondantes étant $v_1 v_2$ (et v_θ dans la direction perpendiculaire au plan R,z) ; si $\emptyset$ (R,z) a la forme trouvée par Darboux le mouvement du point M admet les trois intégrales :

I_1 = intégrale des forces vives

$$I_1 = v_1^2 + v_2^2 + v_\theta^2 - 2\emptyset(R,z)$$

I_2 = intégrale des aires

$$I_2 = Rv_\theta$$

$$I_3 = X_2^2 v_1^2 + X_1^2 v_2^2 + X_1^2 X_2^2 v_\theta^2 - 2\emptyset^*$$

I_3 n'a pas la forme indiquée par Whittaker; soit en effet :

$$I_1 = H(X_1, X_2, v_1, v_2, v_\theta)$$

et $Q = Q(X_1 X_2, v_1 v_2 v_\theta)$ l'intégrale de Whittaker.

On peut prendre pour I_3 une combinaison linéaire quelconque de H et de Q.

Le choix de Kuzmin est intéressant parce qu'il permet directement de trouver les axes de l'ellipsoïde des vitesses. En effet

I_1 et I_3 sont des fonctions paires des vitesses v_1, v_2, v_θ

I_1 est une fonction impaire de v_θ .

On peut montrer à partir de là que les axes de l'ellipsoïde des vitesses sont les axes X, Y, Z' du trièdre mobile par rapport auquel on définit les coordonnées homofocales de Kuzmin.

Soit : $\Pi = \frac{dR}{dt}$, $\Theta = v_\theta$, $Z = \frac{dz}{dt}$

On considère Π, Θ, Z comme des variables aléatoires.

Par un changement de coordonnées (rotation) on leur fait correspondre des variables X, Y, Z'.

On dit que le nouveau système d'axes définit les axes de l'ellipsoïde des vitesses si :

$$E\left[(X-\bar{X})\ (Y-\bar{Y})\right] = 0$$
$$E\left[(Y-\bar{Y})\ (Z'-\bar{Z}')\right] = 0$$
$$E\left[(X-\bar{X})\ (Z'-Z')\right] = 0$$

où $E\left[(A)(B)\right] = \iiint A\ B\ f(\Pi\ \Theta\ Z)\, d\Pi\, d\Theta\, dZ'$

C'est donc un système d'axes pour lequel les corrélations sont nulles. Et c'est la seule définition générale de l'ellipsoïde des vitesses.

Prenons pour axes X, Y, Z' l'axe

X tangent à l'hyperbole

Z tangent à l'ellipse

et Y v

D'où $X = v_1$ $Y = v_\theta$ $Z = v_2$

On a : $E(\bar{X}) = 0$ $E(\bar{Z}) = 0$ et $E(\bar{Y}) \neq 0$

et les corrélations sont nulles parce que $f(I_1,I_2,I_3)$ est paire en v_1,v_2 et impaire en v_0

L'angle α tel que : $tg2\alpha = \frac{2Rz}{R^2+z_o^2-z^2}$

introduit dans la deuxième partie donne donc la déviation du vertex.

On a montré ainsi que si on prend $f(I_1,I_2,I_3)$ comme fonction de distribution des vitesses on trouve un ellipsoïde des vitesses dont les 3 axes sont inégaux.

Il y a déviation du vertex en latitude seulement.

f est une fonction qualconque de I_1,I_2,I_3.

On ne pourra pas déduire la densité par l'intégrale

$$\rho = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f \, dudvdw$$

Mais on la déduira directement de ϕ

C'est là, la part originale du travail de Kuzmin.

Kuzmin dit que l'existence de I_3 est une hypothèse "globale" et déduit le résultat de Whittaker pour ϕ soit :

$$\phi = \frac{f_1(X_1)-f_2(X_2)}{X_1^2 - X_2^2}$$

On montre que f1 et f2 sont des parties d'une seule fonction $f(z)$ où $z = X_1$ si $|z| > 1$ et X_2 si $|z| < 1$

On déduit ρ par l'équation de Poisson soit :

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$

L'étude de la densité ρ est intéressante dans le traité de Kuzmin puisqu'on la déduit de la seule donnée de la fonction ψ

représentant la densité le long de l'axe du système galactique par la relation :

$$\rho = g_1^2 \psi_1 + 2G_1 g_2 \psi_{12} + g_2^2 \psi_2$$

Pour que ρ soit positive il suffit que ψ soit paire, positive, décroissante ce qui est naturel pour la densité le long de Oz Kuzmin calcule ensuite la masse totale du système en fonction de ψ

$$\left(\frac{GM}{zo} = \int_0^{\infty} (1+X^2)\psi \, dX \right)$$

Après l'étude du cas particulier $\phi = \frac{GM}{zo\sqrt{(X_1+X_2)}}$ qui correspond aux systèmes plats, on définit un modèle concret de la galaxie par la formule suivante :

$$f'' = \frac{k}{nXo} \left(\frac{Xo}{\varphi}\right)^n$$

Le choix le plus intéressant est celui pour lequel n = 3.

Dans ce cas Kuzmin déduit la fonction de distribution des vitesses en supposant f fonction de $I_1 I_2$ seulement, distribution dont on a donné la représentation graphique.

Il importe d'appliquer cette théorie pour les mouvements perpendiculaires au plan galactique qui permettent d'obtenir des résultats importants sur la structure de la galaxie, particulièrement au voisinage du soleil, car les données d'observations ne sont pas perturbées par l'absorption interstellaire qui peut être négligée dans cette direction.

c) CONCLUSION

THEORIE DES MOUVEMENTS PERPENDICULAIRES AU PLAN GALACTIQUE

Pour pouvoir faire cette théorie on doit faire l'hypothèse suivante : le système étudié est séparable, c'est-à-dire que les mouvements suivant la direction Oz et leur projection dans le plan perpendiculaire sont indépendants.

Précisons ces mouvements et la notion d'indépendance de ces mouvements :

a) Etude du mouvement d'une étoile dans le champ U(R,z) de révolution autour de l'axe Cz de la galaxie, sachant que $R\frac{d\theta}{dt} = C$ on a :

$$I \begin{cases} \ddot{R} = \frac{C^2}{R^3} + \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{d^2R}{dt^2} & (1) \\ \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{d^2z}{dt^2} & (2) \end{cases}$$

Au voisinage de z = 0 on peut développer U(R,z) en série et on obtient :

$$U(R,z) = A_0(R) + A_1(R)z + A_2(R)\frac{z^2}{2} + \ldots$$

$A_1(R) = 0$ car le plan $z = 0$ est supposé être un plan de symétrie.

D'où $U(R,z) = A_0(R) + A_2(R)\frac{z^2}{2} + \cdots$

Le système (I) admet comme solution particulière :

$\begin{cases} R = R_o \\ z = 0 \end{cases}$ ce qui représente le mouvement circulaire dans le plan galactique.

L'équation (1) montre que $\frac{c^2}{R_o^3} = -\left(\frac{dA}{dR}\right)_{R=R_o}$

Considérons les mouvements voisins de ces mouvements circulaires supposés stables.

Ils sont périodiques.

L'équation (1) définit les mouvements épicycloïdaux de Lindbla

L'équation (2) donne $\ddot{z} = A_2(R_o)z$.

On voit d'après cette équation que le mouvement en z est séparable car on ne voit intervenir que z et la constante locale $A_2(R_o)$.

Ceci n'est valable que pour des systèmes très plats où les mouvements en z sont des oscillations sinusoïdales.

Avec la condition de Lindblad $\frac{\partial^2 U}{\partial R \partial z} = 0$ le mouvement en z est toujours séparable. Pour généraliser cette condition on a introduit le potentiel de Darboux Liouville. Avec ce potentiel on peut prévoir que les variables :

$$X_1 = u$$

$$X_2 = v$$

définiront des mouvements séparables et que le mouvement en v pour $u = u_o$ (constante) sera une approximation du mouvement en z qui sera meilleure que l'approximation sinusoïdale. Etudions donc ces mouvements.

b) Etude du mouvement de M pour :

$$U = \frac{f(u)-g(v)}{u^2 - v^2}$$

avec : $R = zo\sqrt{u^2-1} \quad \sqrt{1-v^2}$

$z = zo \; u \; v$

R, z vérifient le système lagrangier $L = T+\emptyset$

où $\quad T = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2) \quad$ avec $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$

$$\emptyset = -\frac{C^2}{R^2} + U(R, z)$$

$U(R, z)$ est du type de Darboux Liouville.

Montrons que le potentiel $U_1 = -\frac{C^2}{R^2}$ est du même type.

On a en effet : $\frac{z_o^2}{R^2} = \frac{1}{u^2-1} \quad \frac{1}{v^2-1} = \frac{f_1(u)-g_1(v)}{u^2-v^2}$

avec $f_1 = \frac{1}{u^2-1}$ et $g_1 = -\frac{1}{1-v^2}$

On a donc : $\emptyset$ est de la forme :

$$\frac{F(u)-G(v)}{u^2-v^2}$$

avec :
$$\begin{cases} F(u) = f(u) - \frac{C^2}{u^2-1} \quad \frac{1}{z_o^2} \\ G(v) = g(v) + \frac{C^2}{1-v^2} \quad \frac{1}{z_o^2} \end{cases}$$

On est ainsi ramené au problème de Liouville à savoir intégrer le système Lagrangien.

$$L = T+\emptyset \quad \text{où}$$

$$T = \frac{1}{2}(u^2-v^2)z_o^2\left[\frac{\dot{u}^2}{u^2-1} + \frac{\dot{v}^2}{1-v^2}\right]$$

$$\emptyset = \frac{F(u)-G(v)}{u^2-v^2}$$

Ce système admet l'intégrale première $T = \emptyset+h$

On l'intègre par le changement de variable temps suivant :

$$dt = (u^2-v^2)\, d\tau$$

Posons $u' = \frac{du}{dt}$ l'accent désignant donc la dérivation par rapport à τ

$u(\tau)$ et $v(\tau)$ vérifient le système différentiel II qui est la somme de deux systèmes Lagrangiens $l_1(u), l_2(v)$ avec

$$\text{II} \quad \begin{cases} l_1(u) = \frac{z_o^2}{2} \frac{u'^2}{u^2-1} + F(u)+hu^2 & (1) \\ l_2(u) = \frac{z_o^2}{2} \frac{v'^2}{1-v^2} - G(v)-hv^2 & (2) \end{cases}$$

qui admettent les deux intégrales premières :

$$\frac{z_o^2}{2} \frac{u'^2}{u^2-1} = F(u)+hu^2+k_1$$

$$\frac{z_o^2}{2} \frac{v'^2}{u^2-1} = -G(v)-hv^2+k_2$$

La somme des deux doit redonner l'intégrale des forces vives. On a donc la condition : $k_1+k_2 = 0$

ou encore : $k_2 = k$ et $k_1 = -k$

Appelons paquet d'orbites l'ensemble des orbites correspondant aux valeurs h, C et k.

Nous considérons le paquet pour lequel $u = u_o$ et contenant k comme paramètre pour faire apparaître l'intégrale $k(v,v')$ de cette théorie qui généralise l'intégrale $\frac{z'^2}{2} - U(z)$ = constante obtenue quand on ne considère que la variable z.

On calcule C et h en fonction de u_o et k par les équations suivantes exprimant la condition $\begin{matrix} u = u_o \\ u' = 0 \end{matrix}$

$$\text{III} \quad \begin{cases} F(u_o) + hu_o^2 = k \\ \left(\frac{dF}{du}\right)_o + 2hu_o = 0 \end{cases}$$

Le paquet dépend donc de deux paramètres k, u_o ; rappelons que dans l'hypothèse de Lindblad $\frac{\partial^2 U}{\partial R \partial z} = 0$ le paquet analogue (mouvements plans circulaires et oscillations périodiques) dépend aussi de deux paramètres : le rayon R_o du mouvement circulaire et l'amplitude z_o des oscillations perpendiculaires.

Notons que pour un tel paquet la donnée pour $t = t_o$ de :

$$\begin{cases} v = v_o \\ \frac{dv}{dt} = w_o \end{cases}$$

détermine v et w à un instant quelconque et on peut édifier un théorème de Jeans pour la fonction de distribution $f(v,w)$.

Faisons les hypothèses suivantes :

1°) R est grand (donc u_o grand) car on est au voisinage du soleil;

2°) Le système est plat donc v est petit

Cherchons dans ces conditions z et Z en fonction de v et w.

On a :

$$z = z_o\, u_o\, v$$

$$Z = z_o\, u_o\, \frac{dv}{dt}$$

ou $Z = z_o u_o w (u_o - v^2)^{-1}$

$$Z = z_o u_o \frac{w}{u_o^2} \left[1 - \left(\frac{v}{u_o}\right)^2 \right]^{-1}$$

soit en négligeant les puissances de $\frac{v}{u_o}$ égales ou supérieures à 2

$$\begin{cases} z = z_o u_o v \\ Z = \dfrac{z_o}{u_o}\, w \end{cases}$$

Remarquons que $R_o = z_o u_o \sqrt{1 - \left(\frac{u}{u_o}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{u_o}\right)^2}$

Donc $R_o \simeq z_o u_o$

et le mouvement en z est donné par :

$$\begin{cases} z = R_o v \\ Z = \dfrac{z_o^2}{R_o}\, w \end{cases}$$

Le calcul de v (t) par quadrature à partir de l'intégrale II (2) permet alors la détermination de z et Z avec les approximations déduites des hypothèses faites sur u_o et v.

Cherchons l'intégrale II (2) en termes de z et Z.

Cette intégrale s'écrit :

$$\frac{z_o^2}{2} \quad \frac{v'^2}{u^2 - 1} = - G(\nu) - h v^2 + k$$

ou encore compte tenu des valeurs trouvées plus haut pour z et Z :

$$\frac{Z^2}{2} = - g \left(\frac{z}{u_o z_o}\right) - \frac{C^2 u_o^2}{z_o^2 u_o^2 - z^2} - h \frac{z^2}{z_o^2 u_o^2} + k \quad (4)'$$

Les équations (III) donnent :

$$C^2 = z_o^2 (u_o^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \left[f(u_o) - \frac{1}{2} \left(\frac{df}{du}\right) u_o - k \right]$$

$$h = \frac{1}{u_o^2} \left[f(u_o) - \frac{1}{2} \left(\frac{df}{du}\right) u_o - k \right] - \frac{1}{2u_o} \left(\frac{df}{du}\right)_o$$

C'est l'intégrale généralisant $\frac{\dot{z}^2}{2} - U(z) =$ constante.

On voit ainsi que la base de l'étude des mouvements perpendiculaires au plan galactique est fournie par l'étude de ce qui généralise les mouvements épicycloïdaux de Lindblad à savoir les mouvements : $u = u_o$ (grand)

v petit

La densité pour $z = 0$ est donnée par :

$$(4 \pi G \rho)\, z = 0 = C^{\prime 2} + 2(B^2 - A^2)$$

A et B sont les constantes d'Oort.

Si V_c est la vitesse circulaire pour $R = R_o$

On a : $$\frac{V_c^2}{R_o} = - \left(\frac{dU}{dR}\right)$$

et :

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{V_c}{R} - \frac{dV_c}{dR} \right]$$

$$B = - \frac{1}{2} \left[\frac{V_c}{R} + \frac{dV_c}{dR} \right]$$

ou encore compte tenu des valeurs trouvées plus haut pour z et Z :

$$\frac{Z^2}{2} = -\varepsilon\left(\frac{z}{u_o z_o}\right) - \frac{C^2 u_o^2}{z_o^2 u_o^2 - z^2} - h\,\frac{z^2}{z_o^2 u_o^2} + k \quad (1)'$$

Les équations (III) donnent :

$$C^2 = z_o^2 (u_o^2 - 1)^{\frac{2}{1+k}} \left[f(u_o) - \frac{1}{2}\left(\frac{df}{du}\right) u_o - k \right]$$

$$h = \frac{1}{u_o^2}\left[f(u_o) - \frac{1}{2}\left(\frac{df}{du}\right) u_o - k \right] - \frac{1}{2u_o}\left(\frac{df}{du}\right)_o$$

C'est l'intégrale généralisant $\frac{\dot{z}^2}{2} - U(z) = \text{constante}$.

On voit ainsi que la base de l'étude des mouvements perpendiculaires au plan galactique est fournie par l'étude de ce qui généralise les mouvements épicycloïdaux de Lindblad à savoir les mouvements : $u = u_o$ (grand)

v petit

La densité pour z = 0 est donnée par :

$$(4\pi G\rho)\, z = 0 = C^{\times 2} + 2(B^2 - A^2)$$

A et B sont les constantes d'Oort.

Si V_c est la vitesse circulaire pour $R = R_o$

On a : $$\frac{V_c^2}{R_o} = -\left(\frac{dU}{dR}\right)$$

et :

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{V_c}{R} - \frac{dV_c}{dR} \right]$$

$$B = -\frac{1}{2}\left[\frac{V_c}{R} + \frac{dV_c}{dR} \right]$$

A^2 et B^2 sont négligeables devant C'^2 qui est tiré de l'équation (1)' Les valeurs de A et de B sont données par l'observation.

$$C^2 = \left(\frac{d^2U}{dz^2}\right)_{z=0} = -g''(0) + 2\frac{C^2}{z_o^2} - 2\frac{h}{z_o^2 U_o^2}$$

C'est aussi l'expression approchée de $(4\pi G\rho)\ z = 0$.

Remarquons que Kuzmin a choisi l'hypothèse "globale" pour l'existence de I_3 (destinée à expliquer les trois axes inégaux de l'ellipsoïde des vitesses) c'est-à-dire une fonction de force restreinte à une forme mathématique qui n'a aucune justification physique. Pour l'étude ci-dessus on peut supposer son hypothèse valable localement seulement c'est-à-dire pour R voisin de R_o et z petit.

2) On peut utiliser l'équation (1)' comme argument de la fonction de distribution (Théorème de Jeans) et élaborer une théorie sur la loi de force et la distribution des vitesses, pour z petit, tenant compte de la variable R (voisin de R_o) par le paramètre u_o .

BIBLIOGRAPHIE

(1) G.G. Kuzmin : Model of the steady galaxy allowing of the triaxial distribution of velocities (Tartu Astronoomia Observatoorium Teated Nr 2, 1956)

(2) G.L. Camm : The ellipsoïdal distribution of stellar velocities
M.N. N° 4 1941.

(3) F. NAHON : La loi de force et les mouvements stationnaires des étoiles dans la direction perpendiculaire au plan galactique (Bull Astr.T 21, 1956).

(4) J. DELHAYE : Astronomie stellaire (collection Armand-Colin 1953).

(5) S. CHANDRASEKHAR: The dynamics of stellar systems (Ap.J 90,1, 1939).